MALYNÁR

Číslo 6 • Máj 2007 Letná časť 16. ročníka

Ahoj!

Je tu koniec roka a konečne aj posledné vytúžené číslo Malynára s vašimi dlho očakávanými riešeniami, poradím a všetkými vzorovými riešeniami. Nakoniec ste sa predsa len dočkali. Ešte viac sa však určite tešíte na sústredko, ktoré sa teraz bude odohrávať v krásnej dedinke Rejdová. Tí, čo ste nemali toľko štastia a tento rok sa vám na sústredko nepodarilo ísť, nezúfajte. Nabrali ste veľa cenných skúseností a v ďalšom školskom roku ich určite naplno využijete a zabojujete znova. Držíme vám palce a tešíme sa na vás.

Malynár

Vzorové riešenia úloh 1. série Letnej časti

Úloha č. 1:
opravoval Rišo Dubiel

Magdaléna Krejčíová, Vladislav Vancák, Dominik Benko

Zadanie: Húsenice sa včera pretekali v jedení listov. Keby si len dnes vedeli spomenúť, ktorá vlastne vyhrala... Spýtali sa preto chrobáčikov okolo a hľa, čo sa dozvedeli:

1. Bubu je pažravejšia ako Anastázia.
2. Buď je Dalila pažravejšia ako Bubu, alebo Anastázia je pažravejšia ako Bubu.
3. Buď je Cecília pažravejšia ako Dalila, alebo Anastázia je pažravejšia ako Cecília.
4. Buď je Cecília pažravejšia ako Anastázia, alebo Bubu je pažravejšia ako Dalila.

Pomôžte húseniciam zistiť, ktorá na akom mieste skončila.

Riešenie: V prvom rade značenie: aby sme ušetrili miesto a sily, budeme Anastáziu označovať A, Bubu B, Cecíliu C a nakoniec Dalilu D. Na vyjadrenie vzťahu viac pažravá – menej pažravá medzi dvoma húsenicami budeme používať znamienko nerovnosti (>). (Teda vetu Bubu je pažravejšia ako Anastázia zapíšeme ako $B > A$). Navyše budeme predpokladať, že z každej dvojice húseníc je jedna pažravejšia ako druhá.

Tak a poďme na to. Hneď prvé tvrdenie je veľmi príjemné, predovšetkým preto, že je veľmi jednoduché. Takže si môžme všetci spolu poznačiť, že $B > A$. Poďme na druhé tvrdenie: $D > B$ alebo $A > B$. Ale čo to? Veď predsa chrobáčikovia nám povedali (a my sme si to poznačili), že $B > A$ a nie naopak, a teda $D > B$. Celé tretie tvrdenie sa zaoberá Cecíliou, o ktorej my zatiaľ nič nevieme, a preto

je pre nás zatiaľ neužitočné. So štvrtým tvrdením už je to lepšie: $C > A$ alebo $B > D$. Ale my už vieme, že $D > B$, čiže to, že $B > D$ nemôže byť pravda. Preto ostáva len možnosť $C > A$. Teraz, keď už vieme, že $C > A$, môžme sa vrátiť k tretiemu tvrdeniu: $C > D$ alebo $A > C$. Naše predchádzajúce zistenie odporuje tomu, žeby $A > C$, a tak neostáva nič iné, než $C > D$.
Tak si zhrňme na čo sme prišli: $B > A$, $D > B$, $C > A$, $C > D$. Keďže $C > D$ a $D > B$, potom určite $C > B$. Čize C je väčšie ako A, B aj ako D. Najpažravejšia je Cecília. Ostáva nám, že $D > B$ a $B > A$, takže $D > A$. Dostávame konečné poradie – C, D, B, A.

Komentár: Ako je už zvykom, veľmi veľa z vás malo úlohu správne, ale čo už takým zvykom nie je, veľa z vás malo aj pekne popísaný postup. Zaslúžite si pochvalu. :)

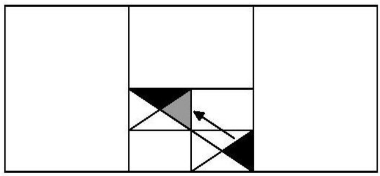
Úloha č. 2:

opravoval Tomáš Kocák

Laura Šalja a Peter Vook

Zadanie: Cecília sa opäť raz nudila, tak si narysovala obdĺžnik a začala ho rozdeľovať (ako na obrázku). Najprv ho rozdelila na tri rovnaké (zhodné) časti. Strednú z nich rozdelila na dve polovice a jednu z polovíc rozdelila na štyri rovnaké obdĺžničky. Dva z obdĺžničkov ešte rozdelila uhlopriečkami na trojuholníčky. Potom Anastázii povedala, že dva čierne vyfarbené trojuholníčky majú dokopy obsah $1\,\mathrm{cm}^2$. Ako vie Anastázia zistiť, aký obsah má najväčší obdĺžnik?

Riešenie:



Presuňme si jeden z čiernych trojuholníkov tak, ako to je znázornené na obrázku. Teraz už vidno, že súčet obsahov čiernych trojuholníkov je polovica obsahu najmenšieho z obdĺžnikov na obrázku. Takže tento obdĺžnik má obsah $2\,\mathrm{cm}^2$. Takéto obdĺžniky sú na obrázku 4 a tvoria polovicu jednej z tretín pôvodného obdĺžnika. Jedna tretina pôvodného obdĺžnika má potom $4 \cdot 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 16\,\mathrm{cm}^2$. Takéto časti sú v pôvodnom obdĺžniku 3 a preto obsah pôvodného obdĺžnika je $3 \cdot 16\,\mathrm{cm}^2 = 48\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár: Mnohí z riešiteľov na začiatku riešenia prehlásili, že ak súčet obsahov čiernych trojuholníkov je $1\,\mathrm{cm}^2$, tak potom každý z týchto trojuholníkov má obsah $0,5\,\mathrm{cm}^2$. V tomto prípade to síce je pravda, ale musí to byť aj zdôvodnené. Pýtate sa, prečo? Tak tu je odpoveď. Predstavte si, že sme na začiatku riešenia príkladu. Poviem si, že jeden z trojuholníkov vyzerá menšie ako ten druhý a preto má napríklad $0,3\,\mathrm{cm}^2$ a ten druhý bude potom mať $0,7\,\mathrm{cm}^2$. Ďalej sa pozrieme, ako vyzerá najmenší z obdĺžnikov. V tomto obdĺžniku sa nachádzajú dva „väčšie“ a dva „menšie“ trojuholníky, preto bude mať obsah $2 \cdot 0,3\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 0,7\,\mathrm{cm}^2 = 2\,\mathrm{cm}^2$. Ďalej už môžeme pokračovať ako vo vzorovom riešení. Paráda. Vyšlo nám $48\,\mathrm{cm}^2$. Je to to, čo sme mali dostať. Lenže celé riešenie je založené na nesprávnej úvahe na začiatku, takže sa nedá pokladať za správne. Ešte jeden príklad: Chcem dokázať, že $4 = 5$. Stačí vyjsť z nepravdivého tvrdenia $0 = 1$ a pripočítať k obom stranám 4. A je to. Asi je vám jasné, že takto to nefunguje, v správnom riešení musí byť správny každý krok. Nemôžeme vychádzať z niečoho nepravdivého, potom ani výsledok úvah nemusí byť pravdivý. A keďže niektoré veci nevidno na prvý pohľad, treba ich zdôvodňovať, aby ich správnosť bola jasná aj čitateľovi vášho riešenia.

Úloha č. 3:

opravovali Aďa Szilágyiová & Marcel Štubňa

Žanetka Semanišinová, Patrik Turzák

Zadanie: Bubu a Dalila hrajú spoločenskú hru pre dve húsenice. Tá, ktorá vyhrá partiu, dostane 2 body a tá, ktorá prehrá partiu, príde o 1 bod. Ak Bubu vyhrala dokopy trikrát a Dalila má konečné skóre 5 bodov, koľko hier Bubu a Dalila hrali?

Riešenie: Poďme na to logicky, nie bezhlavým skúšaním. Ak Bubu vyhrala dokopy 3-krát, Dalila musela 3-krát prehrať a ostatné hry vyhrala. Na konci mala Dalila 5 bodov. To znamená, že keby nehrali tie tri hry, ktoré Dalila prehrala, nestratila by tri body a mala by $5 + 3 = 8$ bodov. Za každú výhru získala 2 body, preto musela vyhrať 4-krát. Teraz už vieme, že Dalila 3-krát prehrala a 4-krát vyhrala, teda hrali dokopy 7 hier. To je odpoveď na našu otázku. Na poradí, v akom húseničky vyhrávali alebo prehrávali, pritom nezáleží, skúste porozmýšľať, prečo. Môžeme si ešte zistiť, ako skončila Bubu: keďže vyhrala 3-krát a 4-krát prehrala, mala na konci $(3 \cdot 2) - (4 \cdot 1) = 2$ body.

Komentár: Úloha patrila medzi ľahšie, väčšina z vás ju mala vypočítanú správne, ale nie všetci ste aj dostali plný počet bodov. Nestačí iba napísať „úloha bola ľahká“ a k tomu odpoveď. Body sú prideľované aj za postup, ktorý má byť napísaný na papieri a nie iba vo vašich hlavičkách. :) Chyby, ktoré sa vyskytli, boli napríklad, že ste počítali s tým, že Bubu vyhrala 3-krát a viac (ale v zadaní je napísané 3-krát, ani viac ani menej), alebo že ste neodčítali 1 bod za prehru, niekedy, naopak, pripočítali. Nabudúce treba pozornejšie čítať zadania úloh. :)

Úloha č. 4:

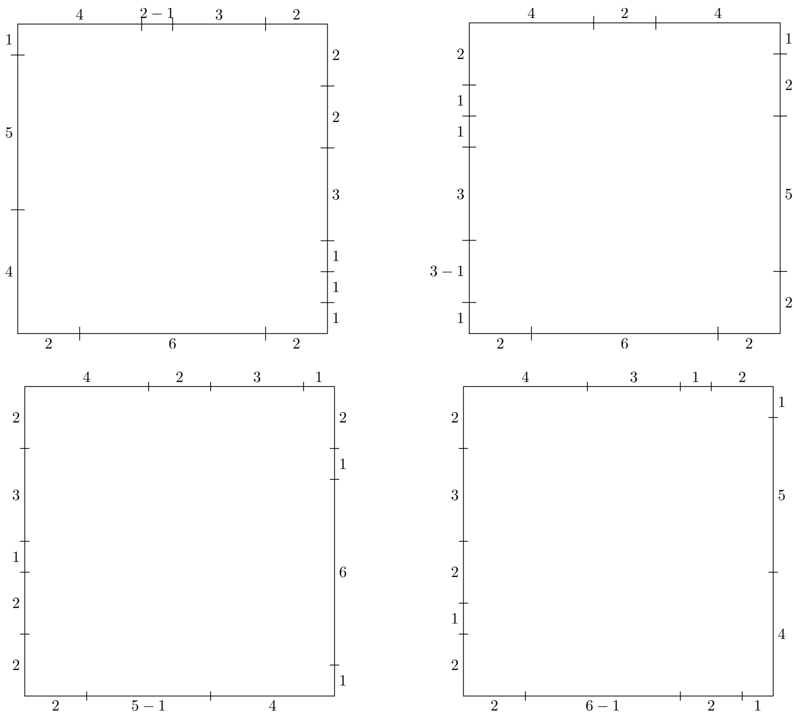
opravovala Aďa Szilágyiová

Žanetka Semanišinová, Miroslav Novák, Barbora Blašková,
Viktória Maciková

Zadanie: Cecília našla rovné paličky rôznej dĺžky a štyri rôzne zalomené paličky, ako na obrázku. Každú si odmerala a zapísala jej dĺžku v cm. Dĺžky rovných paličiek sú 1 cm, 1 cm, 2 cm, 2 cm, 3 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm. Vie z týchto paličiek poskladať štvorec so stranou v celých centimetroch tak, že paličky (aj tie zalomené) môže ľubovoľne otáčať a preklápať? Ak áno, navrhnite ako, ak nie, vymeňte jednu rovnú paličku za paličku o 1cm dlhšiu alebo kratšiu a poskladajte štvorec.

Riešenie: Spočítajme si dĺžky všetkých paličiek. Dĺžky zalomených paličiek sú $(1+2)+(2+2)+(1+4)+(2+4) = 18\,\text{cm}$, dĺžky rovných $1+1+2+2+3+3+5+6 =$

23 cm. Dokopy je to $18 + 23 = 41$ cm. Ak z toho máme poskladať štvorec bez toho, aby sme paličky museli polámať, musí byť tento súčet deliteľný 4 (štvorec má štyri strany rovnakej dĺžky). To ale nie je, $41 : 4 = 10$ zv. 1, takže už vieme, že sa to nedá. Môžeme niektorú paličku skrátiť alebo predĺžiť o 1 cm. Ak niektorú predĺžime, súčet bude 42, čo opäť nie je deliteľné 4. Ak niektorú skrátime, súčet bude 40, a $40 : 4 = 10$. Teraz by sme už možno vedeli poskladať štvorec (isté to nie je, napríklad pre paličky s dĺžkami 20, 4, 4, 4 (v centimetroch) je súčet dĺžok deliteľný štyrmi, ale štvorec sa z nich poskladať nedá). A ktorú paličku vlastne skrátime? Určite nemôžeme skrátiť tie zalomené, podľa zadania môžeme skracovať len rovné. Z tých zase nemôžeme skrátiť niektorú dlhú 1 cm, pretože to by sme ju vlastne odobrali, nie skrátili. Môžeme teda skrátiť niektorú z paličiek dlhých 2, 3, 5 alebo 6 cm. Ďalej je to už len na skúšaní a vhodnom rozmiestnení paličiek, riešení je viac. Tu sú štyri z nich, v každom je skrátená iná palička, aby sme dokázali, že naozaj sa dá skrátiť ktorákoľvek.



Komentár: Úloha bola ľahká, preto je drvivá väčšina z vás odmenená piatimi bodmi. Najviac problémov niektorým z vás spôsobilo chybné zadanie v prvom čísle časopisu, kde neboli zadané dĺžky rovných paličiek. Aj tu sa však dalo vynájsť, stačilo skúsiť poskladať štvorec z toho, čo máme. Súčet dĺžok zalomených paličiek je 18, čo nie je deliteľné 4. Ak by sme niektorú paličku predĺžili alebo skrátili o 1 cm, ostane súčet rovný 17 alebo 19. Ani jedno z týchto čísel nie je deliteľné 4. Preto sa zo samotných zalomených paličiek nedal poskladať štvorec.

Úloha č. 5:

opravovala Katka Potpinková

všetci 5-bodoví

Zadanie: Bubu, Dalila, Cecília a Anastázia opäť raz súťažili. Tentokrát si lámali hlavičky nad magickým štvorcom. Je to štvorec zložený z 9 malých štvorčekov (teda 3×3), a je v ňom uložených prvých 9 nepárnych čísel $1, 3, 5, 7, 9, 11$, 13, 15, 17 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch uhlopriečkach je rovnaký. Po štvorci sa im však rozliezli nezbedné písmenká a čísla zakryli. Nájdite súčet čísel, ktoré sa skrývajú pod písmenkami A a E.

Riešenie: Keďže v magickom štvorci máme použiť prvých 9 nepárnych čísel(to znamená že 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17), tak si vieme vypočítať súčet čísel v riadku, či stĺpci alebo uhlopriečke, keďže sú tieto súčty rovnaké. Súčet všetkých čísel v tabuľke je 81. To znamená, že v jednom riadku bude súčet 27, keďže riadky sú tri. Teraz už jednoducho dopočítame čísla. Začneme číslom B, lebo ho vieme hneď vypočítať: $B = 27 - 13 - 3 = 11$. Takto postupne dorátame všetky čísla: $A = 15$, $C = 9$, $E = 17$, $D = 7$. Súčet $A + E$ je $15 + 17 = 32$.

Komentár: úloha zjavne nebola náročná, prišlo veľa správnych riešení. Najčastejšou chybou bola asi nepozornosť – často ste mali správne vyplnené všetky čísla, lenže ste zabudli vyriešiť zadanú úlohu: určiť súčet $A+E$. Poučenie: po vyriešení úlohy si prečítame ešte raz zadanie, či sme vyriešili tú úlohu, ktorú nám zadali. :)

Úloha č. 6:

opravovali Maja „Černica“ Černicová & Vlado „Droopy“ Novák

Tomáš Tomaško, Roman Pivovarník

Zadanie: Bubu sa chválila Dalile, akú má zvláštnu kocku. Každá z 12-tich jej hrán je nafarbená na červeno alebo zeleno. Každá stena kocky má najmenej jednu hranu červenú. Dalila kocku nevidela, ale tvrdí, že má minimálne 6 hrán zafarbených na červeno. Má Dalila pravdu? Anastázia vôbec nevie, ako na to Dalila prišla. Vysvetlite jej to.

Riešenie: Poďme si spolu prečítať zadanie úlohy. Každá stena kocky má najmenej jednu hranu červenú. Každá jedna hrana kocky je spoločná pre dve steny kocky. Preto nemusíme farbiť ku každej jednej stene aj jednu hranu (ako to robila Dalila). Určite však treba zafarbiť aspoň tri hrany: ak by sme zafarbili len dve, budú mať nanajvýš štyri steny červenú hranu. Premyslite si to, je to kľúčová myšlienka riešenia. Ostáva nájsť tie tri hrany. Treba to spraviť tak, aby žiadne dve hrany neležali v jednej stene. (Čo by sa stalo, ak by ležali? Skúste si to.) To už zvládnete aj sami. A záver? Dalila pravdu nemá. Prečo, to sme už vysvetlili.

Komentár: Táto úloha bola celá postavená na uvedomení si, že hrany sú spoločné pre dvojice stien, čo nám veľmi pomáha v znížení počtu hrán, ktoré musíme nafarbiť na červeno. Ak ste na toto prišli, tak si uŽ takmer nikto z vás nechal ujsť zdarný dojazd do cieľa. Mnohí ste až príliš jednoducho uverili tomu, že Dalila má pravdu a neskúšali ste viacero možností. Kde-tu sa objavilo pár chybičiek z nepozornosti, ale aj napriek tomu sa teším na ďalšie pekné riešenia, azda už úplne bez chýb. :)

Vzorové riešenia úloh 2. série Letnej časti

Úloha č. 1:

opravovala Aďa Szilágyiová

Vlado Vancák

Zadanie: Niekoľko husenic sa dohodlo, že si kúpia obrovskú kapustnú hlavu. Taka hlava je ale drahá, tak sa na ňu museli poskladať. Nevedeli sa však dohodnúť, po koľko korún sa majú zložiť. Ak by každá dala 20 korún, chýbalo by im 8 korún. Ak by sa poskladali po 21 korún, mali by 12 korún naviac. Ako z toho viete zistiť, koľko húseníc sa skladalo na kapustnú hlavu a koľko tá stála?

Riešenie: Pri skladaní sa po 20 korún by im chýbalo 8 korún. Ak by sa poskladali po 21 korún, mali by 12 korún naviac. Pri tom druhom skladaní by teda mali o $8 + 12 = 20$ Sk viac ako pri prvom. Počet húseníc sa však nezmenil. Každá by dala o korunu viac a dokopy dali o 20 korún viac, čo znamená, že húseníc muselo byť 20. Pri prvom skladaní by mali $20 \cdot 20 = 400$ Sk a keďže im 8 korún chýbalo, kapusta by stála 408 korún. Pri druhom skladaní by mali $20 \cdot 21 = 420$ Sk a kapusta by stála takisto 408 korún.

Komentár: Úlohu ste zvládli veľmi dobre. Niektorí ste ju riešili skúšaním či tipovaním. Takto sa síce k výsledku časom dopracujete, ale veľmi ľahko sa môžete zmýliť. Navyše neviete, či úloha nemá viac rôznych riešení a či ste uhádli všetky. Navyše to môže dlho trvať: keby kapustná hlava stála veľmi veľa, možno by ste sa takýmto spôsobom dopracovali k výsledku tak o tri mesiace... Ak už riešite príklad skúšaním a prídete na výsledok, skúste sa na to bližšie pozrieť, či nenájdete nejakú zaujímavú súvislosť, ktorá by vám pomohla nájsť iné, lepšie riešenie. Posledná maličkosť ešte pre tých, čo riešia nejaký príklad rovnicou – ak napíšete ako riešenie len rovnicu a jej úpravy, veľa bodov za to nedostanete. Treba opísať, z čoho ste rovnicu dostali, čo počítate, čo ktoré písmenko znamená... Proste slovne opísať celé riešenie. Tak veľa šťastia v budúcnosti. :)

Úloha č. 2:

opravovali Ifan Dacko & Katka Potpinková

Tomáš Tomaško, Eva Diószeghyová a Katarína Kírešová.

Zadanie: Anastázia, Bubu, Cecília a Dalila boli opäť raz hladné, tak si našli okrúhle jabĺčko, postavili sa okolo neho a začali chrúmať, každá na svojom mieste. Po chvíli sa šli napť vody k potoku a keď sa vrátili a uvideli svoje štyri vychrúmané diery v jabĺčku, Bubu a Dalila sa rozhodli, že nebudú ďalej pokračovať vo svojej načatej diere ale v niektorej zo zvyšných. Koľkými rôznymi spôsobmi sa môžu postaviť okolo jabĺčka?

Riešenie: Úlohou bolo zistiť, koľkými spôsobmi sa môžu Anastázia, Bubu, Cecília a Dalila opäť postaviť k už načatým štyrom dieram na jablku. Pre zjednodušenie môžeme namiesto celých mien používať len ich prvé písmená A, B, C a D a diery na jablku očíslujeme: 1., 2., 3. a 4. Riešenie úlohy rozdelíme do troch krokov.
Prvý krok. Všetkých možností, ako usporiadať 4 húsenice na štyri časti jablka, je 24. Vypočítame to takýmto spôsobom: Na prvú dieru sa mohla postaviť jedna zo 4 húseníc, na 2. dieru už môžeme vybrať len jednu z troch zvyšných húseníc, na 3. dieru sa mohla postaviť jedna z dvoch húseníc, ktoré ešte nemajú miesto a sposledná húsenica sa postaví na 4. dieru. Ľahko si zrátame, že počet možností je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Všimnite si, že keby sme chceli všetky možnosti vypísať, tak toto nám dáva systém, ako to spraviť: najprv dám k 1. diere húsenicu A a vypíšem všetky možnosti pre ostatné húsenice na zvyšných dierach (to tiež popísaným spôsobom). Potom dám k 1. diere húsenicu B a vypíšem všetky možnosti pre ostatné húsenice. A tak ďalej. Každú možnosť tak dostanem presne raz.
Druhý krok. Máme zadanú podmienku, že ani B, ani D sa nechceli postaviť na svoje pôvodné miesta. Uvažujeme teda, koľkými spôsobmi z 24 sa B postavila na svoje pôvodné miesto. Zoberieme si prípad, že B stojí na svojom mieste, potom na ďalšie miesto sa mohla postaviť jedna z troch húseníc, na ďalšie jedna z dvoch a na posledné štvrtá húsenička. Tak teda máme $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností (na prvej pozícii je 1, pretože je tam stále húsenica B). Rovnakú úvahu použijeme aj pre D na svojom mieste. Prídeme k medzivýsledku: z 24 možných usporiadaní je 6 takých, kde B stoji na svojej počiatočnej pozícii a 6 takých, kde D stojí na svojej počiatočnej pozícii. Ostáva $24 - 6 - 6 = 12$ dobrých pozícií.
Tretí krok. Tých 12 však nie je správny výsledok: musíme uvažovať ešte o situácii, keď B a zároveň D stoja pri svojich pôvodných dierach. Každé takéto rozmiestenie húseničiek sme odrátali raz, keď sme odrátavali možnosti pre B na pôvodnej pozícii a raz, keď sme odrátavali možnosti pre D. My ich však od celkového počtu 24 chceme odrátať len raz, nie dvakrát. Takže ich musíme spätne raz pripočítať. Ostáva zistiť, koľko ich je. Keď B aj D stoja pri pôvodných dierach, ostávajú pre zvyšné dve húseničky len dve možnosti. Výsledok je teda $24 - 6 - 6 + 2 = 14$.

Ešte raz si zopakujeme kľúčovú myšlienku. Najprv zrátame počet všetkých možností bez obmedzenia o pôvodnej diere. Potom odrátame nesprávne možnosti pre B a nesprávne možnosti pre D. Výsledkom by mal byť počet správnych možností. Lenže niektoré možnosti sme odrátali až dvakrát. Kde sme ich vlastne odrátali? V druhom kroku. Tieto dve možnosti, keď B a D stoja na svojom mieste, sú 2 zo 6, keď B stojí na svojej počiatočnej pozícii a zároveň 2 zo 6, keď D stojí na svojej počiatočnej pozícii. To znamená, že sme urobili v druhom kroku toto: $24 - 4 - 2 - 4 - 2 = 12$. Ako vidíme, odrátali sme dvojku dvakrát, preto sme ju teda v treťom kroku opäť prirátali. (OBRÁZOK) Tento obrázok nazývame Vennov diagram. Čísla v jednotlivých útvaroch hovoria, koľko možností (prvkov) sa v nich nachádza. Celý obrázok má 24 prvkov, toľko je všetkých možných usporiadaní húseničiek okolo jablka. Jeho súčasťou sú dva kruhy. Prvý obsahuje 6 možností, keď B sa nachádza pri svojej pôvodnej diere. Druhý obsahuje to isté pre D. Tieto kruhy majú spoločnú časť, v ktorej sú možnosti, keď B aj D sú pri pôvodnej diere. Skúsili ste si úlohu s takýmto zadaním nakresliť? Vidíte, dá sa to. A tento obrázok dokáže priblížiť celú situáciu a tým uľahčiť riešenie úlohy.

Komentár: Úloha skutočne nebola veľmi ťažká, čo pre väčšinu z vás znamená plný počet bodov. Nemuseli ste ju riešiť naším spôsobom, dospieť k správnemu výsledku sa dalo trpezlivým a pozorným vypisovaním všetkých možností. Našli sa však aj takí, ktorí si úlohu asi neprečítali poriadne a nepochopili, ako sa majú húseničky postaviť. Bolo treba dať pozor na to, že húseničky sa vrátili k už vyhryzeným dieram, ale iba Bubu a Dalila sa určite nevrátili na pôvodné miesta. A tiež na to, že sa medzi sebou mohli húseničky aj pomiešať. Niektorí z vás však dostali len 4 body, keďže sa pomýlili pri spočítavaní vypísaných možností. A viete si predstaviť, že keby sme mali päť húseníc, tak možností len pribudne. Prezradíme, že v takom prípade by odpoveď bola 78. A toto by sa mi veru vypisovať nechcelo. Nehovoriac o situácii pre 6 húseníc… „Obrázková“ metóda popísaná vo vzorovom riešení však funguje aj tu, a rovnako rýchlo ako pre štyri húsenice.

Úloha č. 3:

opravovali Zuzka Cocuľová & Vlado "Droopy" Novák

Jaroslav Petrucha, Denisa Semanišinová a Katarína Kirešová

Zadanie: Dalila mala narodeniny a dostala od svojich kamarátok veľkú okrúhlu tortu. Keďže však má rada matematiku, rozhodla sa Dalila nakrájať tortu tromi rovnými rezmi od kraja ku kraju. Vie takto rozdeliť tortu pre svoje tri kamarátky tak, aby dostala každá (aj Dalila) jeden kúsok? Ak by mala Dalila 4 alebo 5 kamarátok, vie aj tak rozdeliť tortu tak, aby každá dostala jeden kúsok a nič nezvýšilo? Koľko najviac kamarátok by mohla Dalila mať, aby takýmito troma rezmi vedela rozrezať tortu pre všetkých? (Nezabudnite, že aj Dalila si zaslúži zo svojej torty.)

Riešenie: Zadanie nie je celkom jednoznačné v tom, či môžete rezať len vertikálne, alebo aj horizontálne a taktiež či sa jednotlivé odrezané časti medzičasom nemôžu akosi prekladať tak, aby sme ďalšími rezmi mohli získat viac kúskov. Keďže takýchto obmien tejto úlohy je príliš veľa, stačilo nám, keď ste vyriešili jednu z nich. Ukážeme si riešenie pre klasické rezanie torty – akoby bola kruhová a režeme ju rezmi v tvare úsečky. Samozrejme, nesmie chýbať zdôvodnenie, prečo nemôžeme dostať viac ako 7 častí.
Čo všetko podľa zadania úlohy máme zistiť? Potrebujeme ukázať delenie torty na 4, 5 a 6 kúskov (Dalila a 3, 4, 5 kamarátok). Potom chceme zistiť, na koľko najviac kúskov ju vieme rozdeliť. Na splnenie oboch otázok naraz môžeme začať sledovaním, čo sa bude diať, ak postupne budeme vykonávať rezy. Mám jednu okrúhlu tortu, prvým rezom viem tortu rozdeliť len na dve časti. Žiadnu inú možnosť nemám. Druhým rezom viem rozdeliť: a) jeden z kúskov na dve časti a dostávam 3 časti (obr2.), alebo b) oba kúsky na dve časti a dostanem 4 časti. Ďalej rozoberme prvú možnosť po druhom reze kde sme zatiaľ dostali 3 kúsky a ideme robiť tretí rez. Môžem: 1. rozdeliť ďalší kúsok na dve časti - dostanem

4 časti. (obr.a1) 2. rozdeliť dva kúsky na dve časti - dostanem 5 častí. (obr.a2) 3. rozdeliť všetky kúsky na dve časti - dostanem 6 častí. (obr.a3)

Teraz si rozoberme druhú možnosť po druhom reze, kde sme zatiaľ dostali 4 kúsky a ideme robiť tretí rez. Môžeme robiť presne to isté čo v predchádzajúcom prípade, len s jediným rozdielom, že teraz pri každej z týchto možností dostaneme o jednu časť viac ako v predchádzajúcom prípade. Maximálny počet ktorý takto sme dostali bol 7. Tieto možnosti boli pri klasickom rezaní keď robíte rezy len zhora.

Znova môžeme vidieť, že každú jednu časť viem rozdeliť najviac na dve. Treba si uŽ len uvedomiť koľko najviac častí môžem rovným rezom rozdeliť.

Inak rezy už nevieme urobiť, preto maximálny počet častí ktorý môžeme dostať je 7. ČiŽe Dalila môže mať najviac 6 kamarátok.

Komentár: Úloha sa skladala z dvoch častí. Prvá bolo ukázanie delenia na 4,5 a 6 častí, čo väčšina z vás bezproblémov zvládla. Druhá časť bola o hľadaní maximálneho počtu kúskov, ktoré vieme urobiť. Tí z vás, ktorí ste sa s tým trochu pohrali. ste na to väčšinou prišli. Veľká škoda, že mnoho z vás si túto časť ulohy vôbec nevšimlo a vôbec ste ju neriešili. Preto nabudúce všetci čítajte zadania pozorne až do posledného písmenka, aby malo čo možno najviac z vás plný počet bodov.

Úloha č. 4:

opravovala Aďa Szilágyiová

Katka Kirešová, Martin Vrabec

Zadanie: Cecília raz pri kopaní tunelov našla zahrabaný papierik a na ňom napísané: **KLOKAN−1000 · KLO+1000 · KAN**=? Nevedela si s tým rady, tak sa spýtala Anastázie. Tá podobný príklad už videla a povedala Cecílii, že pod kazdým písmenkom sa skrýva jedna číslica (od 0 po 9), pod rovnakými písmenkami rovnaká číslica a pod rôznymi písmenkami rôzne číslice. Anastázia tvrdí, že výsledok je KANKLO. Má pravdu? Cecília vôbec nevie ako na také niečo mohla prísť, vysvetlite jej to.

Riešenie: Najprv si treba uvedomiť, že vôbec nezáleží na tom, aké čísla sa skrývajú pod jednotlivými písmenkami. Prečo? Majme nejaké číslo, napríklad 47. Ak ho vynásobíme 1000, dostaneme číslo 47 000. Čo sa zmenilo? Iba sme pridali k číslu 47 tri nuly. Teraz majme nejaké iné číslo, a opäť ho vynásobme 1000. Zase dostaneme to isté číslo a na konci tri nuly. Pritom to číslo môže mať hocikoľko cifier. Vždy, keď násobíme nejaké číslo číslami 10, 100, 1000, dostaneme také isté číslo, ale na konci budú ešte jedna, dve, tri nuly.

A teraz k riešeniu: $KLO \cdot 1000$ je $KLO000$, takisto $KAN \cdot 1000$ je $KAN000$. (Posledné tri sú nuly.) Aký je rozdiel medzi číslami $KLOKAN$ a $KLO000$? Rôzne sú len posledné tri cifry, takže keď tieto dve čísla od seba odčítame, ostanú nám práve tie, teda KAN. Overiť si to môžeme zapísaním čísel pod seba a odčítaním. Potom už len stačí spočítať $KAN000$ a KAN. Vidno, že výsledok je $KANKAN$. Môžeme to overiť zapísaním pod seba a sčítaním. A čo nakoniec vyšlo? Predsa $KANKAN$. Takže Anastázia nemala pravdu.

Komentár: Takmer všetci ste na správny výsledok prišli. Ako, to už je druhá vec. Mnohokrát ste iba dosadili nejaké čísla, spočítali, a napísali, že to platí vždy. Ale ako vám mám uveriť, že to platí vždy, keď ste napísali len jednu jedinú možnosť? A tých možností je veru dosť veľa, vypisovať všetky by vám zabralo asi viac času ako všetky ostatné príklady dokopy. Preto trebalo vaše zistenie „zovšeobecniť“ – to znamená napísať, prečo to platí vždy. Také zovšeobecnenie je vyššie vo vzorovom riešení.

Úloha č. 5:

opravoval Rišo Dubiel

Patrik Turzák, Miroslav Novák, Žanetka Semanišinová, Deniska Semanišinová

Zadanie: Húsenice hrali raz hru. Dalila šla za dvere a Anastázia, Bubu a Cecília sa v izbe postavili vedľa seba do radu. Potom jedna z nich zakričala cez dvere: „Ja stojím vpravo od Cecílie.“ Po chvíli Dalila začula spoza dverí: „Ja stojím vpravo od Bubu.“ Nakoniec Cecília zakričala: „Ja nestojím v strede.“ Dalila vie, že jedna z viet bola nepravdivá, a že klamala tá húsenica, ktorá stojí najviac vpravo. Pomôžte jej zistiť, ako mohli húsenice stáť v rade.

Riešenie: Tak sa na to pozrime. Húsenice dokopy vyslovili tri výroky. Keďže jedine o treťom výroku vieme, ktorá húsenica ho povedala (Cecília), mohli by sme sa naňho pozrieť podrobnejšie. "Ja nestojím v strede." Ok, tak uvažujme. Ak by Cecília klamala, zo zadania to teda znamená, že stojí vpravo. Lenže - v tom prípade by tento jej výrok bol pravdivý. Takže Cecília určite klamárka nie je, môžme jej teda veriť, že hovorí pravdu. Čiže Cecília naozaj nestojí v strede, a keďže napravo stojí húsenica-klamárka, Cecília nutne musí stáť vľavo. Ostali nám ešte Anastázia a Bubu a miesta vľavo a v strede. Pozrime sa teraz na prvý výrok. „Ja stojím vpravo od Cecílie“. Nevieme síce ktorá húsenica to povedala, ale nech už to bola ktorákoľvek, hovorila pravdu - Cecília je totiž úplne naľavo, a teda obidve húsenice stoja naozaj napravo od nej. A to nie je všetko - netreba zabúdať, že húsenica úplne napravo klame, no keďže sme dokázali že tento výrok je pravdivý, húsenica ktorá ho povedala musela stáť v strede. Stále síce nevieme ktorá z dvoch húseníc to vlastne bola, ale k zisteniu by nám mohol pomôcť tretí výrok: „Ja stojím vpravo od Bubu.“ Nemohla ho povedať húsenica stojaca v strede, pretože tá stojí jedine vpravo od Cecílie (a klamať nemôže, kedže je v strede). Čiže výrok určite vyslovila húsenica-klamárka, stojaca vpravo. Ak by to bola Anastázia a Bubu by stála v strede, stála by naozaj vpravo od Bubu - a hovorila by teda pravdu, ale to nemôže, veď húsenica napravo klame. Ostáva teda možnosť, že to povedala Bubu. A naozaj - ak by Bubu povedala „Ja stojím vpravom od Bubu“ - klamala by, čo sedí. Výsledne poradie je teda takéto: zľava doprava Cecília, Anastázia, Bubu.

Komentár: Tu už bolo správných riešení pomenej, často ste bez akéhokoľvek postupu len nakreslili zopár rôznych poradí, ktoré boli málokedy správne:) Tiež bol problém v tom, že niektorí z vás neuvažovali, že Bubu by mohla povedať vetu „Ja stojím vpravo od Bubu.“ (Lepšie povedané, že by húsenica mohla povedať vetu sama o sebe, aj keď klame.)

Úloha č. 6:

opravovali Marcel Štubňa & Maja Černicová

Deniska Semanišinová, Lenka Mareková

Zadanie: Bubu sa okrem iného zaujíma aj o históriu. V poslednom čase je však akási zábudlivá. Vie, že istá významná udalosť sa stala v 15 storočí, no nevie v ktorom roku. Pamätá si len, že ciferný súčet toho roku je 16, a že ak číslicu na mieste desiatok vydelí číslicou na mieste jednotiek, výsledok je 4 a zvyšok 1. Aký to bol rok?

Bonusáčik: viete, aká významná udalosť sa v tomto roku stala?

Riešenie: Prvé, čo nám treba zistiť, je, ktoré roky sú 15. storočie. Sú to roky 1401 až 1500. Rok 1500 nám nevyhovuje, lebo jeho ciferný súčet je len 6. Preto prvé dve cifry budú určite 1 a 4. Ich ciferný súčet je zatiaľ 5. To znamená, že zvyšné dve cifry budú mať ciferný súčet $16 - 5 = 11$. Zároveň vieme, že ak predposlednú cifru vydelíme poslednou, dostaneme 4 a zvyšok 1. Cifry sú 0–9, takže hľadáme číslo menšie ako 10, ktoré má po delení 4 zvyšok 1. Nájdime si najprv čísla deliteľné 4 (to sú 4 a 8) a pripočítajme k nim zvyšok, ktorý máme dostať, teda 1. Dostali sme čísla 5 a 9. Ak by bolo na mieste desiatok číslo 5, potom na mieste jednotiek by bolo číslo 1 ($5 : 4 = 1$, zv. 1.). Ale $5 + 1$ nie je 11. Ak by na mieste desiatok bolo číslo 9, na mieste jednotiek by bolo 2 ($9 : 4 = 2$, zv. 1). A keďže $9 + 2 = 11$, sedí aj ciferný súčet roku 1492: $1 + 4 + 9 + 2 = 16$. Hľadali sme teda rok 1492. A čo také dôležité sa vtedy udialo? V tomto roku moreplavec Krištof Columbus objavil Ameriku.

Komentár: Takmer všetci ste na správny rok nakoniec prišli, ale len veľmi málo z vás dostalo 5 bodov. Boli to tí, ktorí uvažovali aj o roku 1500. Ostatní ste hneď na začiatku vyhlásili, že prvé dve cifry budú určite 1 a 4, a na to, že 15. storočie trvá až do roku 1500, ste zabudli. Pritom stačilo napísať len toľko, že tento rok zadaniu nevyhovuje, lebo nemá ciferný súčet 16, a preto prvé dve cifry naozaj budú 1 a 4. S bonusovou úlohou ste si už poradili ľahko, za čo dostávate veľkú pochvalu. :)

Poradie riešiteľov po 2. sérii

Poradie	*Meno*	*Trieda*	*Škola*	*Poč.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Pr.*	*Súčet*
1. – 3.	Denisa Semanišinová	Sekunda	GAlejKE	30	5	5	5	4	5	5	5	60
	Katarína Kirešová	4. C	ZStanKE	30	5	5	5	5	5	4	5	60
	Žaneta Semanišinová	3. B	ZAngeKE	30	5	5	5	5	5	5	5	60
4.	Lenka Mareková	6. A	ZKro4KE	30	5	5	2	5	4	5	5	59
5.	Vladislav Vancák	Prima B	GAlejKE	30	5	5	5	3	5	3	5	58
6.	Martin Vrabec	5. A	ZKro4KE	30	5	5	4	5	-	3	5	57
7. – 8.	Berenika Tužilová	6. A	ZKro4KE	28	5	5	5	5	3	3	5	56
	Jaroslav Petrucha	Sekunda	GMetoBA	28	5	-	5	5	3	5	5	56
9.	Miroslav Novák	5. B	ZKro4KE	28	5	5	2	3	5	4	5	55

Poradie	*Meno*	*Trieda*	*Škola*	*Poč.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Pr.*	*Súčet*
10. – 12.	Dominik Benko	5. B	ZKro4KE	27	5	4	4	5	0	4	5	54
	Anton Gromóczki	5.A	ZStanKE	27	5	5	4	4	2	4	5	54
	Ema Diószegkyová	4. C	ZStanKE	26	4	5	4	5	5	2	5	54
13. – 15.	Tomáš Tomaško	6. A	ZKro4KE	29	5	5	3	3	0	4	3	52
	Katarína Krajčiová	4. B	ZJeniKE	28	4	5	1	4	1	5	5	52
	Alexandra Dupláková	6. A	ZKro4KE	30	4	2	4	3	5	3	3	52
16.	Patrik Turzák	6. A	ZKro4KE	29	5	0	1	4	5	3	3	50
17. – 18.	Alana Korimová	6. A	ZKro4KE	29	5	-	-	3	5	4	3	49
	Miroslav Stankovič	6. A	ZKro4KE	28	-	0	5	4	5	4	3	49
19. – 21.	Barbora Blašková	4. C	ZStanKE	30	4	0	4	3	-	3	3	47
	Peter Vook	5. B	ZKro4KE	28	5	1	4	3	0	3	3	47
	Kristína Vajdová	Prima	GHaliLC	30	4	2	1	5	1	2	3	47
22.	Roman Pivovarník	Prima A	GMudrPO	30	5	0	4	3	-	-	0	42
23.	Erik Jasaň	5. A	ZStanKE	28	4	1	-	-	5	3	0	41
24.	Florián Hatala	5. B	ZKro4KE	20	3	4	4	3	-	3	3	40
25.	Barbara Šinková	Prima	GHaliLC	26	3	0	1	1	5	3	0	39
26. – 27.	Ján Jursa	6. A	ZKro4KE	29	4	0	1	-	-	4	0	38
	Daniel Hajduk	5. B	ZKro4KE	25	4	2	4	-	0	3	0	38
28. – 29.	Petra Eškutová	5. B	ZKro4KE	18	3	1	5	3	1	4	3	37
	Jakub Hromada	5. B	ZKro4KE	25	3	4	1	-	-	4	0	37
30. – 31.	Viktória Maciková	5. B	ZKro4KE	30	-	-	-	-	3	2	0	35
	Vladislav Vlček	Prima A	GAlejKE	27	3	1	-	-	0	4	0	35
32. – 33.	Daniel Ondra	6. A	ZKro4KE	23	0	4	1	-	1	5	0	34
	Nikola Valečková	5. A	ZStanKE	23	3	1	1	3	0	3	0	34
34. – 35.	Magdaléna Krejčíová	Prima A	GTataPP	12	4	2	5	3	0	2	3	31
	Roman Staňo	5. B	ZKro4KE	12	2	4	4	3	0	3	3	31
36.	Michal Ivanecký	Príma	GAlejKE	30	-	-	-	-	-	-	0	30
37.	Peter Micek	6. A	ZKro4KE	28	-	-	-	-	-	-	0	28
38. – 40.	Laura Šalja	6. A	ZKro4KE	27	-	-	-	-	-	-	0	27
	Adriána Lukáčová	5. B	ZKuzmic	27	-	-	-	-	-	-	0	27
	Daniel Kopf	4. A	NULL	27	-	-	-	-	-	-	0	27
41.	Viktória Baranová	5. A	ZKuzmic	9	5	2	3	0	-	4	3	26
42.	Adrián Tkáč	5. A	ZStanKE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
43.	Dominik Horňák	6.A	ZKuzmic	23	-	-	-	-	-	-	0	23
44.	Michal Benej	5. B	ZKro4KE	12	2	1	4	-	-	2	0	21
45.	Nikola Majorošová	3.B	ZAngeKE	20	-	-	-	-	-	-	0	20
46.	Karoline Hájeková	5. A	ZStanKE	17	-	-	-	-	-	-	0	17
47.	Jana Cerulová	5. B	ZKro4KE	6	4	-	-	-	3	2	0	15
48.	Adela Kinlovičová	4. A	ZJeniKE	0	4	1	2	3	0	1	3	14
49.	Patrícia Kelbelová	5. B	ZKro4KE	10	-	-	1	-	0	2	0	13
50. – 51.	Jakub Kupčík	5. B	ZKro4KE	3	4	-	-	-	-	2	0	9
	Simona Herteľová	6. A	ZKuzmic	3	2	-	1	-	0	3	0	9
52. – 54.	Lucia Legáthová	4. A	ZJeniKE	0	4	1	2	0	0	1	0	8
	Sarah Shahpesandy	5.B	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	0	8
	Barbora Vilmošová	5. A	ZStanKE	0	2	1	1	-	4	-	0	8
55.	Enrik Pacinda	Prima	GHaliLC	0	2	0	2	2	0	1	0	7
56.	Renáta Zmijová	4. B	ZUžhoKE	0	0	0	-	0	0	3	0	3
57.	Richard Husár	5.A	ZStanKE	0	-	-	-	-	-	-	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Gymnázium Poštová 9, Košice
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: MALYNÁR — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj • Letná časť 16. ročníka (2006/2007)
Internet: `http://malynar.strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`