MALYNÁR

Číslo **5** — Ročník **29** — **malynar.strom.sk**

8 \ na§OR

Prvú sériu máme už opäť úspešne za sebou, no nebol by to kompletný semester, ak by na nás nečakala ešte tá druhá. Všetci sme určite hlboko ponorení do výsledkovej tabuľky a opäť sa vraciame k príbehu, ktorý s ňou súvisí. Ak sa chceme dozvedieť, ako sa príbeh skončí, je načase vziať pero a papier do ruky a vrhnúť sa na príklady, ktoré nás už netrpezlivo čakajú v druhej sérii.

Vaši milovaní vedúci MALYNÁRa

8 cn @«LO

¦¾@n} he9L⁴H\ h 9§O h 9§_cn®

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Tábore mladých matematikov. Môžeš sa tešiť na neopakovateľný program, zábavne podanú matiku a príjemnú spoločnosť.

TMM sa bude konať 11. – 18. augusta v Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletné informácie, ako aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke. Nenechávaj si prihlásenie na poslednú chvíľu, lebo počet miest je obmedzený. Tešíme sa na teba!

-¶n}n®Ĺ }_0ɐ0j_9 ou Ĺ}_0 ωen\ e0§jĹ\n 0h0 §}9

1 opravovali **Timka Szöllősová** a **Naťa Čigašová**
najkrajšie riešenie: Maťka Osuská

54 riešení

µ9L9j_0

Balónov bolo sedem a na každom z nich bolo napísané jedno číslo. Ak by sme sčítali čísla na všetkých siedmich balónoch, vyšlo by nám 280. Súčet čísel na tých štyroch, ktoré im ostali, je 178. Dievčatkám uleteli tri balóny: modrý, zelený a červený. Na zelenom bolo napísané číslo dvakrát väčšie ako na modrom. Na červenom balóne bolo číslo trikrát väčšie ako na modrom balóne. Aké čísla boli na balónoch, ktoré uleteli? Nájdite všetky riešenia a odôvodnite, že iné nie sú.

|_0ɐ0j_0

Najprv zistíme, aký bol súčet čísel na uletených balónoch. Vieme, že súčet čísel zvyšných 4 balónov, ktoré ostali, je 178 a súčet všetkých balónov je 280, tak súčet čísel na uletených balónoch bude 280 178 = 102.
Teraz si uvedomíme, že zelený balón má rovnaké číslo ako dvojnásobok čísla modrého balóna, to znamená, že má rovnaké číslo ako 2 modré balóny. Červený balón má teda rovnaké číslo ako 3 modré balóny.
Takže súčet červeného, zeleného a modrého balóna sa bude rovnať súčtu troch modrých, dvoch modrých a jedného modrého balóna, to je 6 modrých balónov.
6 modrých balónov má teda súčet čísel 102, jeden modrý balón musí mať číslo 102/6 = 17. Zelený balón bude mať číslo 2 17 = 34 . Červený balón bude mať číslo 3 17 = 51.
Z výpočtov nám vyplýva, že je len jedno riešenie. Ak by totiž číslo na modrom balóne bolo menšie, tak by aj súčet 6 modrých balónov bol menší ako 102 . Podobne platí, že ak by bolo číslo na modrom balóne väčšie, tak aj súčet 6 modrých balónov bol väčší ako 102.

bnh0j§¾}

Niektorí z vás, ktorí úlohu neriešili pomocou zámeny všetkých balónov za modré balóny, zabúdali na veľmi dôležitú časť riešenia - odôvodnenie, že iné čísla na balónoch nemohli byť napísané. Tí, ktorí si to vyjadrili pomocou modrých balónov, mali dôkaz ľahký - stačilo povedať, že 102/6 = 17 nemá viac výsledkov. Iný postup riešenia samozrejme nie je zlý, ale treba si dávať pozor, či ste ním splnili všetky veci, ktoré od vás v zadaní vyžadujeme :)

2 opravovali **Janči Richnavský** a **Maťo „Spišo“ Spišák**
najkrajšie riešenie: Magdaléna Škriabová

57 riešení

µ9L9j_0

Perník má pred sebou dve drevené kocky a chcel by na ich steny napísať čísla od 0 po 9 tak, aby bolo pomocou nich možné vyskladať každé číslo od 01 po 31 (jednociferné čísla sú s nulou na začiatku, takže vždy je potrebné použiť obe kocky). Čísla na stenách kocky sa môžu samozrejme opakovať. Vie perník dané čísla takto rozdeliť? Ak áno, ako? Ak nie, prečo? Svoje riešenie poriadne zdôvodnite.

|_0ɐ0j_0

Perník musí na niektorú z kociek napísať nulu, aby mohol vytvoriť číslo 01. Pretože čísel od 01 do 09 je deväť a kocka má 6 stien, nestačí mu napísať nulu na jednu kocku, lebo vtedy by všetkých deväť rôznych cifier 1 až 9 potrebných na vytvorenie čísel od 01 do 09 muselo byť napísaných na druhej kocke, tam sa však nezmestia. Preto potrebuje nulu napísať aj na druhú kocku.
Cifry 1 a 2 musia byť tiež napísané na oboch kockách, aby mohol zložiť čísla 11 a 22 (alebo tiež preto, že čísel 10 až 19 je desať a aj čísel 20 až 29 je desať a vidíme, že podobne ako pre nulu nestačí počet stien jednej kocky na napísanie desiatich cifier). Celkovo tak potrebuje dvakrát nulu, dvakrát jednotku, dvakrát dvojku a zvyšné cifry po jednej, čo je spolu 13 cifier. Na dvoch kockách je iba 12 voľných miest, preto niektorú z potrebných cifier nebude môcť napísať, a tak bude existovať aspoň jedno číslo z rozmedzia 01 až 31, ktoré nebude možné z cifier na kockách zložiť.

bnh0j§¾}

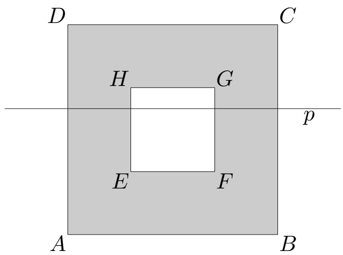
Drvivá väčšina riešiteľov zistila a ukázala, že na kockách musia byť dve jednotky aj dve dvojky, s nulami to bolo už trochu horšie. Malé množstvo bodov sme museli stiahnuť každému, kto sa nás o tom, že musíme mať dve nuly, snažil presvedčiť na nejakom konkrétnom rozmiestnení čísel na kockách. To však nestačí, keďže potrebujeme ukázať, že to bude platiť vždy v akomkoľvek prípade. Našlo sa aj niekoľko riešiteľov, ktorí sa domnievali (alebo inšpirovali večným kalendárom), že otočením šestky dostaneme deviatku. Tento predpoklad nebol správny, a preto riešenia, ktoré ho využívali, nemohli byť ohodnotené plným počtom bodov. Otázka ohľadom otáčania bola spomenutá v diskusii na našej webovej stránke pod zadaním tejto úlohy, kde sme jednému z vás odpovedali, že otáčanie nie je možné. Preto vám odporúčame si stále diskusiu na stránke ku každému príkladu (ak existuje) pozrieť, pretože tam môžete nájsť cenné informácie, ktoré vám zjednodušia alebo viac priblížia zadanie.

3 opravovali **Matúš Hlaváčik** a **Klára "Kel" Hricová**
najkrajšie riešenia: Barbora Menšíková a Marek Cimrák

39 riešení

µ9L9j_0

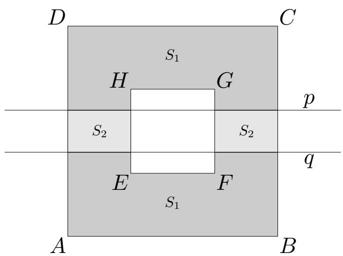
Na obrázku je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 10 cm. Vnútri neho leží menší štvorec $EFGH$. Vieme, že strany AB, CD, EF a GH sú všetky navzájom rovnobežné a strana EF je rovnako vzdialená od AB ako strana GH od CD. Strana EH je rovnako vzdialená od AD ako strana FG od BC. Plocha vnútri $ABCD$ a zároveň mimo štvorca $EFGH$ je označená sivou. Priamka p, ktorá je rovnobežná s AB vo vzdialenosti 6 cm, rozdeľuje sivú plochu na dve časti (ako na obrázku). Obsah jednej časti je o 12 cm© väčší ako obsah druhej. Vypočítajte dĺžku strany EF. Úlohu neriešte rysovaním.



|_0ɐ0j_0

Riešenie začneme dokreslením pomocnej priamky q, ktorá je rovnobežná s priamkou p a stranami štvorca AB a CD, a zároveň je rovnako vzdialená od strany CD ako priamka p od strany AB (6 cm). Keďže strana štvorca je 10 cm, a nakoľko je p vzdialená 4 cm od CD a q od AB tiež 4 cm, tak vidíme, že priamky p a q nám ohraničujú pás so šírkou zostávajúcich 2 cm.

Vieme, že obsah sivej plochy nad priamkou p, ktorú si označíme S_1, je o 12 cm© menší ako obsah sivej plochy pod priamkou p. Na obrázku vidíme, že obsahy sivých plôch nad a pod priamkou p sa líšia len o dva sivé obdĺžničky, ktoré nám vytvorili priamky. Obsah jedného takéto obdĺžnika sme si označili ako S_2.



Menší biely štvorec $EFGH$ je presne v strede väčšieho sivého štvorca $ABCD$, to znamená, že všetky strany štvorca $EFGH$ sú rovnako vzdialené od strán štvorca $ABCD$. Preto aj dva sivé obdĺžniky medzi priamkami, ktoré sme si označili ako S_2, sú určite zhodné a majú rovnaký obsah. Z toho vyplýva, že obsah jedného sivého obdĺžnika je 6 cm© (12 cm© : 2 = 6 cm©).
Vyššie v riešení je uvedené, že vzdialenosť medzi priamkami p a q je 2 cm. Obsah obdĺžnika S_2 je $6cm^2$. Jedna zo strán má veľkosť 2 cm (práve tá vzdialenosť dvoch priamok). Z toho je už zrejmé, že ak je obsah 6 cm© a jedna strana 2 cm, dĺžka druhej strany je 3 cm (vzorček pre obsah obdĺžnika $S = a \quad b$).
Vzdialenosť medzi stranami AD a EH je 3 cm, rovnako aj medzi stranami BC a GF. Strana štvorca AB má dĺžku 10 cm. Jednoduchým výpočtom zistíme, že úsek priamky p či q, ktorý prechádza bielym vnútorným štvorcom je 4 cm (10 2 3). Z toho vyplýva, že strana štvorca $EFGH$ má dĺžku 4 cm.

b n h 0 j §¾}

Väčšina riešiteľov, ktorí sa chopili tejto úlohy, to zvládli pomerne dobre. Jedinou nedokonalosťou, ktorá sa opakovala bolo, že keď ste sa rozhodli skúšať možností, neprešli ste ich všetky (napríklad ste zabudli na to, že strany štvorca nemusia mať celočíselné rozmery) alebo ste nevysvetlili poriadne, prečo je vami nájdená možnosť naozaj jediná správna, a za to sme museli strhnúť nejaké bodíky, pozor na to :).

4 opravovali **Viki Brezinová** a **Lenka Hake**

najkrajšie riešenie: Hanka Hricová, Janka Urbánová

52 riešení

µ 9L9 j _0

Počet myšiek je trojciferné prirodzené číslo. Súčet cifier počtu myšiek je 11. Keď vezmeme jeho cifry a každú z nich vynásobíme samú so sebou a následne tieto súčiny sčítame, tak dostaneme 45 (napr. ak máme číslo 142, tak dostaneme 1 1 + 4 4 + 2 2 = 21). Ak od tohto čísla odčítame 198, získame trojciferné číslo, v ktorom sú tieto cifry v opačnom poradí. Aké je pôvodné číslo? Nájdite všetky možnosti a zdôvodnite, prečo iné nie sú.

| _0ɐ0 j _0

Označme si počet myšiek $\overline{ABC}$. A, B, C sú cifry, teda čísla od 0 po 9. Okrem toho, samozrejme, A nemôže byť 0, inak by nešlo o trojciferné číslo. Všimnime si ďalej druhú podmienku zo zadania. Hovorí, že keď vezmeme cifry A, B, C a každú z nich vynásobíme samú so sebou a následne tieto súčiny sčítame, tak dostaneme 45. Ak vynásobíme samé so sebou číslo 7, 8 alebo 9, tak už tento súčin bude väčší ako 45 (7 7 = 49, 8 8 = 64, 9 9 = 81). Z toho vyplýva, že A, B aj C musia byť menšie ako 7.

Teraz sa pozrime, čo sa stane, ak od čísla $\overline{ABC}$ odčítame 198. C je cifra na mieste jednotiek a je určite menšia ako 8. Na mieste jednotiek, teda dôjde k prechodu cez desiatku a vo výsledku bude na tomto mieste číslo o 2 väčšie ako C (ľahko si môžete overiť, že pri odčítaní 8 od ľubovoľného z čísel 10 až 17, bude mať výsledok na mieste jednotiek naozaj o 2 väčšiu cifru). Pritom podľa tretej podmienky zo zadania získame odčítaním 198 od čísla $\overline{ABC}$ trojciferné číslo, v ktorom sú tieto cifry v opačnom poradí, teda $\overline{CBA}$. To znamená, že cifra A musí byť o 2 väčšia od C.
Čo teraz vieme o hľadanom čísle povedať? Je to trojciferné číslo, ktorého súčet cifier je 11, pričom všetky cifry sú menšie ako 7 a cifra na mieste stoviek je nenulová a o 2 väčšia ako cifra na mieste jednotiek. To nám značne znížilo počet možností. Konkrétne, pre jednotlivé hodnoty cifry A, vieme zvyšné cifry dopočítať a dostaneme tak tieto čísla: 614, 533, 452, 371, 290. Pre A menšie ako 2, by už C bolo záporné.
Keďže sme dostali na výber len 5 možností, rýchlo môžeme overiť, pre ktoré z nich platia všetky podmienky zo zadania. Prvej podmienke vyhovujú všetky, no zvyšným dvom vyhovuje jedine číslo 452: $4\ \ 4 + 5\ \ 5 + 2\ \ 2 = 16 + 25 + 4 = 45$, $452\quad 198 = 254$.
Hľadaný počet myšiek je 452.

b n h 0 j §¾}

Táto úloha sa dala vyriešiť viacerými spôsobmi, väčšina z nich zahŕňala skúšanie niekoľkých možností. To, koľko možností ste museli vyskúšať, záviselo od toho, či ste sa najprv nad úlohou zamysleli a snažili sa počet čísel, ktoré prichádzajú do úvahy obmedziť (ako napríklad vo vzorovom riešení) alebo ste len začali skúšať všetky čísla, ktorých súčet cifier je 11. Najčastejšou chybou bolo, že ste nám len napísali, že ste vyskúšali všetky také čísla a jediné, čo vyhovovalo všetkým podmienkam je 452. Ak nám však nenapíšete všetky čísla, ktoré ste vyskúšali, tak vám za také riešenie nemôžeme dať veľa bodov, pretože nevieme, aké možnosti ste vlastne vyskúšali, a či ste na nejaké nezabudli. Preto ak sa rozhodnete úlohu riešiť skúšaním možností, tak nám ich musíte napísať aj s vysvetlením, prečo ste vyskúšali práve tieto možnosti. Chceli by sme vám však odporučiť, aby ste sa nabudúce nad úlohou najprv zamysleli a skúsili prísť na nejakú myšlienku, ktorá vám obmedzí počet možností. Hľadať riešenie len bezhlavým skúšaním často zaberie oveľa viac času :).

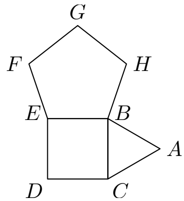
5

opravovali **Kristín Mišlanová** a **Lujza Milotová**
najkrajšie riešenie: všetky 9-bodové riešenia

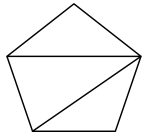
29 riešení

µ9L9j_0

Stánok sa skladá z rovnostranného trojuholníka ABC, štvorca $BCDE$ a pravidelného päťuholníka $EFGHB$, ako vidno na obrázku. Aký je rozdiel medzi uhlami ADE a AHE? Ak máte s úlohou problém, tak by vám mohlo pomôcť naše Edukačné okienko z minuloročného časopisu Malynár-28-4. Úlohu neriešte rysovaním.

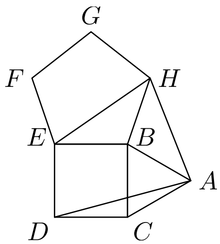


| _0ɐ0 j _0



Pre celé riešenie je veľmi dôležité si uvedomiť, že všetky strany všetkých útvarov na obrázku sú rovnaké. Vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, a keďže náš trojuholník je rovnostranný, veľkosť jeho jedného uhla bude 180° : 3 = 60°. Podobne v štvorci všetky uhly majú veľkosť 360° : 4 = 90°.

Pozrime sa teraz na pravidelný päťuholník. Takýto päťuholník si vieme rozdeliť na tri trojuholníky. Keď sa pozrieme na obrázok, vidíme, že súčet vnútorných uhlov v päťuholníku je vlastne súčet vnútorných uhlov v týchto troch trojuholníkoch, a teda 3 180° = 540°. Takže všetky uhly v pravidelnom päťuholníku majú veľkosť 108° (540° : 5 = 108°).



Chceme porovnať $j\lhd ADEj$ a $j\lhd AHEj$. Z obrázka vidíme, že $j\lhd AHEj = j\lhd AHBj + j\lhd EHBj$. Potrebujeme teda vypočítať $j\lhd ADEj$, $j\lhd AHBj$ a $j\lhd EHBj$.

- ´}¾§9 h 0 $j\lhd ADEj$I

Trojuholník ACD je rovnoramenný s ramenami CA a CD. Potom $j\lhd ACDj = 60° + 90° = 150°$ a $j\lhd ADCj = j\lhd DACj = (180° \quad 150°) : 2 = 15°$, pretože keď od súčtu uhlov v trojuholníku (čiže od 180°) odčítame $j\lhd ACDj$ (čiže 150°) a výsledok vydelíme dvoma, dostaneme veľkosť uhlov ADC a DAC, ktoré sú rovnaké vďaka tomu, že trojuholník je rovnoramenný. Keďže $j\lhd CDEj = 90°$ a $j\lhd ADCj = 15°$, tak $j\lhd ADEj$ je rozdiel $j\lhd CDEj$ a $j\lhd ADCj$, čiže 90° 15° = 75°.

- ´}¾§9 h 0 $j\lhd EHBj$I

Trojuholník EBH je rovnoramenný s ramenami BH a BE. Vieme, že $j\lhd EBHj = 108°$. Ďalej rovnako ako v predchádzajúcom odseku vyrátame $j\lhd EHBj = j\lhd HEBj = (180° \quad 108°) : 2 = 36°$.

- ´}¾§9 h 0 $j\lhd AHBj$I

Súčet $j\lhd ABCj$, $j\lhd CBEj$, $j\lhd EBHj$ a $j\lhd HBAj$ musí byť dokopy 360°. Veľkosti prvých troch spomínaných uhlov už poznáme, čiže $j\lhd HBAj = 360° \quad 60° \quad 90° \quad 108° = 102°$. Trojuholník HBA je rovnoramenný s ramenami BH a BA. $j\lhd HBAj$ už poznáme, čiže $j\lhd AHBj = j\lhd HABj = (180° \quad 102°) : 2 = 39°$.

Už poznáme aj $j\lhd AHEj = j\lhd AHBj + j\lhd EHBj = 39° + 36° = 75°$.
Rozdiel medzi $j\lhd ADEj$ a $j\lhd AHEj$ je 0°, keďže uhly sú rovnaké.

bnh0j§¾}

Väčšina z vás vyriešila úlohu veľmi dobre. Nezabúdajte však, že každú vec v svojom riešení musíte zdôvodniť či dokázať, aby to bolo na 9 bodov. Teší nás, že ste si prečítali naše edukačné okienko alebo niektorí dokonca sami odvodili veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom päťuholníku.

6 opravovali **Kubo** a **Gabča Genčiovci**

najkrajšie riešenie:

43 riešení

µ9L9j_0

a) Na súťaži je 8 súťažiacich. Odohrali sa 3 kolá zápasov, pričom v každom kole každý súťažiaci musel s niekým hrať. Nikto nehral viackrát s rovnakým súperom. Po konci celej súťaže si rozhodca povedal, že chce súťažiacich rozdeliť do dvoch skupín tak, aby každý súťažiaci hral iba so súťažiacimi zo svojej skupiny. Mohol turnaj prebehnúť tak, aby sa mu toto rozdelenie podarilo? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?

b) Na súťaži máme 10 tímov. Odohrali sa 4 kolá zápasov, pričom v každom kole každý tím musel s niekým hrať. Nikto nehral viackrát s rovnakým súperom. Po konci celej súťaže si rozhodca povedal, že chce tímy rozdeliť do dvoch skupín tak, aby každý tím hral iba s tímami zo svojej skupiny. Mohol turnaj prebehnúť tak, aby sa mu toto rozdelenie podarilo? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?

|_0ɐ0j_0

Najprv sa zameriame na prvú časť. V nej každý súťažiaci musí odohrať práve 3 kolá. Predpokladajme, že sa rozhodcovi rozdelenie do skupín na konci podarí. Keďže v každom kole hrá každý súťažiaci proti novému súperovi (takému, s ktorým ešte nehral), vyplýva z toho, že v jednej skupine musia byť aspoň štyria súťažiaci. Tým, že súťažiacich je 8, môžeme ich rozdeliť iba na dve štvorice (ináč by v jednej zo skupín neboli aspoň štyria). Povedzme, že v prvej skupine budú súťažiaci A, B, C, D a v druhej súťažiaci E, F, G, H. Tu je jedna z možností ako môžu hrať:

	1. skupina	2.skupina
1. kolo	A-B, C-D	E-F, G-H
2. kolo	A-C, B-D	E-G, F-H
3. kolo	A-D, B-C	E-H, F-G

To znamená, že rozhodca môže súťažiacich rozdeliť tak, aby vyhovel svojej podmienke.

Teraz sa pozrime na druhú časť. Tímy môžeme rozdeliť tak, aby bol v obidvoch skupinách buď len párny počet, alebo len nepárny počet tímov. Ak je v obidvoch skupinách nepárny počet tímov, už v prvom kole nastane situácia, kedy v obidvoch skupinách jeden tím nebude mať súpera zo svojej skupiny, a teda bude musieť hrať s tímom z druhej skupiny.

Pokiaľ nastane situácia, že v obidvoch skupinách bude párny počet tímov, ani v jednej skupine nesmie byť menej ako 6 tímov. My už totiž z prvej časti vieme, že pri štyroch tímoch by po treťom kole nastala situácia, kedy by už každý v skupine hral s každým zo zvyšných tímov, a tým pádom by v štvrtom kole nemali s kým hrať (ak chceme splniť podmienky rozhodcu). To isté by platilo aj pre menší počet, len by to nastalo skôr. Ak delíme tímy do skupín tak, aby ich tam bol párny počet, vždy v jednej skupine bude viac ako 5 tímov a v druhej menej ako 5 tímov. To znamená, že v tejto časti nie je možné tímy rozdeliť tak, ako to chce urobiť rozhodca.

bnh0j§¾}

Niektorí z vás zabudli na nejakú drobnosť, čo pri tak dlhom zadaní nie je nič neobvyklé, no aj tak sme za to museli strhnúť nejaké body. Najčastejšou chybou však bolo to, že ste si zadanie neprečítali poriadne, a preto ste si do úlohy vymysleli ďalšie požiadavky (napríklad, aby hral každý s každým v skupine). Nabudúce si najprv prečítajte poriadne zadanie a označte si čo z neho viete a na čo všetko máte odpovedať. Potom, čo si premyslíte vaše riešenie, presvedčte sa o tom, že nepracujete s ničím navyše než s tým, čo je v zadaní (alebo v komentároch k úlohe na webe).

8 «§n}_ ®¶n}n® H\ }_0ɐ0 j ∂I Viktória Brezinová, Jakub Genči, Martin Masrna, Martin Mihálik, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Žaneta Semanišinová, Martin Števko

µ9L9j_9 ©u Ĺ}_0 ωen\ e0§jĹ\n 0h0 §}9

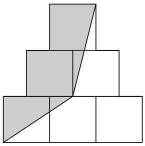
Riešenia pošlite najnekôr do Vu h¾a9 ©·©·

æen\9 o

m e∂ §nc j9 9§}9cH_« 9 \¾L9e_ a0Ljn}n^0HJ G«c}n®¾ d9h9 9 h´ʙc9u p0}j∂ċ0c qn®0L9e G«c}n®0a d9h0I Ō d9h9J §´ _ j0®´\}9e9u 8e0 Ln §9j0ʙ 9 qnű j0a9cĹ §nc0j´ŵ pn§nh qn®0L9e a0Ljn}n^Hn®_I Ō d9h9 j9n¶9a j0®´\}9e9u 8 LncnjH9 9j_ j0Ln §9j0 §nc0j´ŵ i9cnj_0H qn®0L9e h´ʙc0I Ō g´ʙc9J j0@ne9 _ j9ae0qʙ_9u -∂g9¶nh a0 a0Ljn}n^0Hŵ i9 ¶¾®0} 0ʙ§0 LnL9eJ ^0 c9^LĹh« qn®0L9e j9a®_9H a0Lj« j0q}9®L_®ω ®0§«u b§n ®´\}9e e∂ §nc 9 q}0ċny

æen\9 ©

b0ģ 9 j9 cQʙ qn¶0}¾h0 ¶\n}9Jn§®n} ®´¶0}¾ 9cn q´}9h∂L9 j9 n@}¾¶c«J c§n}¾ 9 ce9L¾ ¶n 6 }n®j9c·H\ ´h0§}_Hc´ «en^0j·H\ ʙ§®n}Hn® r®^L´ ® §}0LnH\ ® §}¾jsu d∂ §nc 9 j9H\¾L¶9 j_0cL0 j9 ®}H\« ® _®0a ċ9 §_u 8cω qenH\« h« ∂ p0}j∂ċ0c q}0\ʢ9L9gJ 9@´ j9ʙ_0e e∂ §ncJ 9c H0e¾ q´}9h∂L9 h¾ n@ 9\ 600y

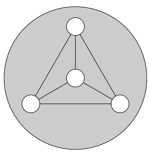


æen\9 ¨

- §}naqnLe9^jnh Lnh0 rq}®Ĺ qnLe9^_0 a0 j9a qnLj0aʙ_0 9 §}0§_0 j9a®}H\j0aʙ_0sJ Ln c§n}Ĺ\n q0}j∂ċ0c q}_ʙ_0eJ 9 hnh0j§¾ej0 j9H\¾L¶9 42 §®n}0j∂J qnL c§n}·h_ rj9 j_^ʙ∂H\ qnLe9^_9H\s 9 j_0c§n j9H\¾L¶9 9 48 §®n}0j∂J j9L c§n}·h_ rj9 ®´ʙʙ∂H\ qnL] e9^_9H\s 9 j_0c§n j9H\¾L¶9u i9 L}«\nh qnLe9^∂ a0 hnh0j§¾ej0 qnen®_H9 ®ʙ0§c·H\ §®n}0j∂ j9H\¾L¶9aωH_H\ 9 ® Lnh0u bnʢcn a0 ®ʙ0§c·H\ §®n}0j∂ ® Lnh0y bnʢcn §®n}0j∂ 9 j9H\¾L¶9 j9 c9^Lnh qnLe9^∂y

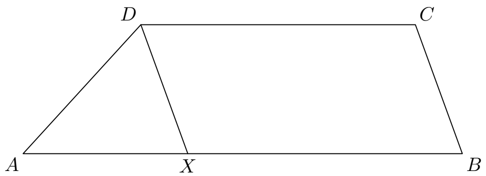
æen\9 V

i9 n@}¾¶c« ω ®´¶j9ċ0jĹ V@nLc´ 9V _®Ĺ n@e9 §_u Kn c9^L0a @nLc´ 9 c9^L0a n@e9 §_ H\H0h0 j9q∂ 9g a0Ljn q}_}nL¶0jĹ ċ∂ en nL o Ln P rc9^LĹ ċ∂ en hQ^0h0 qn«^_g q}¾®0 }9¶su i9®´ʙ0 h« ∂ qe9§_gJ ^0 ċ∂ enJ c§n}Ĺ a0 j9q∂ 9jĹ ® c9^L0a n@e9 §_ a0 ®^L´ §}0§_jn« ωċ§« §}nH\ ċ∂ 0eJ c§n}Ĺ ω ® @nLc¾H\J c§n}Ĺ 9 Ln§·c9aωJ }0 q0c§∂®0 j9H\¾L¶9aω ® L9j0a n@e9 §_u -_0h0 §9c§n ċ∂ e9 }n¶L0e_gy ~®na0 }_0ʙ0j_0 ¶LQ®nLj_§0u



œen\9 U

pn §0ʗ h¾ §®9} e_H\n@0^j∂c9 ABCD Lž^c9h_ ¶¾ce9Lj∂ jABj = 8 9 jCDj = 5u d_H\n@0^j∂c a0 §9c˩ ɐ§®n}«\nej∂cJ c§n}Ĺ\n L®0 §}9j´ r¶¾ce9Lj0s ɷ j9®¶¾anh }n®] jn@0^jĹu ª\ne BCD h¾ 110 §«qű́n® 9 «\ne BAD h¾ 50 §«qű́n®u ?nL X e0^∂ j9 §}9j0 AB §9cJ ^0 jAXj = 3u p0}j∂ċ0c _@«L0 ®0L_0g q}¾®j0 j9ɐ§0en®9g qn §0ʗJ c0ǵ ¶_ §∂ ®0ʗcn g «\e9 ADXu 8c h¾§0 ɷen\n« q}n@eĹhJ §9c @´ ®¾h hn\en qnhQHg j9ɐ0 NL«c9ċjĹ nc_0jcn ¶ h_j«en}nċjĹ\n ċ9 nq_ « g9e´j¾}]©P]Vu œen\« j0}_0ɐ§0 }´ n] ®9j∂hu



œen\9 £

i9 §9@«ʗc0 h¾h0 ċ∂ en 1u -^L´ hQ^0h0 ®´cnj9g a0Lj« ¶ §˩H\§n 9cH_∂I

- *ą c« ċ∂ e« q}_qnċ∂§9g* 9
- *ą 9c a0 ċ∂ en 9 qnű́* 6*J §9c nL j0\n nLqnċ∂§9g* 6
- *ą ®´j¾ n@_g \n 9h˩h 0@n«*

-_0h0 j_0c0L´ Ln §9g 0y ~®na0 }_0ɐ0j_0 qn}_9Lj0 ¶LQ®nLj_§0u

pn}9L_0 qn ou Ĺ}__ e0§jĹ\n 0h0 §}9

pn}9L_0	g 0jn 9 q}_0¶®_ cn	|ncj∂c	¥cne9	ou	©u	¨u	Vu	Uu	£u	p~	G~
ou] ku	|_H\9}L p}_ce0}	µ£	W`8 | g pm	k	k	k	k	k	k	·	**UV**
	`9jc9 ª}@¾jn®¾	µ£	W8e0abN	k	k	k	k	k	k	·	**UV**
	~9h«0e W´Ǹ}_	µ£	µb}nVbN	k	k	k	k	k	k	·	**UV**
	8L9h 8L9h«ɐċ∂j	µV	¥qg iK9W	k	k	k	P	k	k	·	**UV**
	?9}@n}9 g0jɐ∂cn®¾	µU	µb}nVbN	k	k	k	k	]	k	·	**UV**
	¦_hn§0a -¾ec´	µV	µ?n}n?8	k	k	k	k	k	k	·	**UV**
	K9j_0e9 ¦c¾ċn®¾	µV	µd0®n~i	k	P	k	k	k	k	·	**UV**
	8e0j9 G\e9Lj¾	µV	µb`i¥~§	k	k	k	k	k	k	·	**UV**
	g9}§_j ?ne0Ln®_ċ	µU	~µ¥S0e_²?8	k	P	k	k	k	k	·	**UV**
o·u] o©u	8e0jc9 ?¾e_j§n®¾	µ£	Gµ|µ9µ8	k	P	k	k	k	k	·	**U¨**
	[9j9 ^\j¾§n®¾	µV	µm@H~0ċ	k	P	U	k	k	k	·	**U¨**
	[9j9 N}LĹe´_n®¾	µV	µp9jc?8	k	k	P	k	]	k	·	**U¨**
o¨u	|_H\9}L ~0h9j_ɐ_j	µ¨	µp8jXbN	k	k	£	k	k	¢	·	**U©**
oVu	g9}§_j9 m « c9	µ£	µK}`Kg8	k	k	¢	P	k	k	·	**Uo**
oUu] oku	g9§0a b9}q¾ċ	µ£	µ`¥®0[N	k	k	k	£	k	P	·	**U·**
	-na§n ?¾e_j§	µV	µW9ɐ§µ8	P	k	£	k	]	k	·	**U·**
	g9XL9eĹj9 ¥c}_9@n®¾	µU	µb}nVbN	k	k	k	¢	£	k	·	**U·**
	8jj9 b}«qn®¾	µV	µb}nVbN	k	P	]	£	k	k	·	**U·**

pn}9L_0	g 0 j n 9 q}_0¶®_ cn	| nċ j∂c	¥ cne9	ou	©u	¨u	Vu	Uu	£u	p~	G~
	?9}@n}9 ?}_jL^¾cn®¾	µU	µb}nVbN	k	k	k	¨	k	¢	·	U·
©·u	g9}0c G_h}¾c	µV	µ¥W9ɐ§µ8	k	k	k	k	]	V	·	Vk
©ou	mjL}0a ¦G§\	µ£	W-9}ɐµ8	k	k	k	¢	U	k	·	VP
©©u	¦nh¾ɐ d9jX	µ£	µmbn^~i	k	P	k	¢	k	U	·	V¢
©¨u] ©Uu	?9}@n}9 G_h}¾cn®¾	µ£	Gµ | µ9µ8	k	¢	¢	¢	P	P	·	V£
	¥_hnj -9}X9	µU	µb}nVbN	k	V	k	k	k	U	·	V£
	`«}9a [n}ű¾c	µ£	µb}nVbN	k	£	k	£	k	¢	·	V£
©£u	`9jc9 ʒnH\n®¾	µ£	Wmq9§bN	k	©	k	£	k	P	·	V¨
©¢u] ©Pu	?n}_ bǸ}Ǹɐ	µ£	W8e0abN	k	k	]	£	k	k	·	V©
	mjL}0a g0Ln	µ¨	µ~H\h_§	k	¢	]	k	]	P	·	V©
©ku] ¨·u	~nű9 W}nTċ∂cn®¾	µ£	µdin®bN	k	k	©	¢	k	U	·	Vo
	~9}9 -na§cn®9	µU	µpne_bN	k	¢	k	U	£	¨	·	Vo
¨ou	~§9j_ e9® ?0j0ɐ	µ¨	po·¢i ³G	k	k	]	©	]	k	·	¨P
¨©u] ¨¨u	p9§}_c ~ce0j¾}	µ¨	µbnh£~d	P	k	]	¢	]	]	·	¨¨
	`9c«@ bnq0}j_Hcɫ	µ£	µ8e^@i ?	k	P	·	U	¨	P	·	¨¨
¨Vu	|_H\9}L m}n ¶	µU	µb}nVbN	k	¨	©	£	k	·	·	¨o
¨Uu] ¨£u	S_e_q K9«@j0}	µ¨	µ?¾\nű	k	]	]	k	]	]	·	©¢
	[9j9 [}_Hn®¾	µU	µb}nVbN	k	k	]	k	]	]	·	©¢
¨¢u] ¨ku	`n}L9j ~§9j_ e9® ?n_9La_0®	µ£	µmbn^~i	P	o	o	¢	£	o	·	©V
	g_}_9h -9}0H\n®¾	µU	µb}nVbN	k	¨	]	V	]	P	·	©V
	g9}§_j bncn}«ġ9	µU	µmbn^~i	k	P	]	¢	]	]	·	©V
V·u	g_H\9e `9 n	µ£	ª iN~`i |	U	P	V	©	]	V	·	©¨
Vou] V©u	¦nh¾ɐ pnenh cɫ	µ£	µb}nVbN	k	k	]	o	]	¨	·	©©
	g_H\9e ¥9}c9j	µ£	µg | ¥[dG	k	k	V	]	]	]	·	©©
V¨u] VVu	-_e_9h ~e9ɐg9j	µ£	µb}nVbN	k	o	k	©	]	]	·	©o
	p9§}_c ~e_®9	µ£	µmbn^~i	k	P	]	V	]	]	·	©o
VUu] V£u	`¾j ¥§_9®j_Hcɫ	µ£	µb}nVbN	k	k	]	o	]	·	·	ok
	¥9}en§9 ¥« §n®¾	µU	µb}nVbN	k	£	©	©	]	]	·	ok
V¢u	¥_hnj ¥_h9	µ£	µb}nVbN	k	o	P	]	]	]	·	oP
VPu] Uou	`9c«@ ~§}9h@9	µU	µb}nVbN	¢	k	o	]	]	]	·	o¢
	~9}9\ benq §nHc	µ£	¥qg iK9W	]	£	·	£	]	U	·	o¢
	K9j_0e9 [9}h9j c9	µU	µb}nVbN	U	©	]	¨	]	¢	·	o¢
	g_H\9e -¾e0c	µU	µb}nVbN	]	¢	V	o	]	U	·	o¢
U©u	g9§ɷɐ -eċcn	µ£	ª iN~`i |	k	£	]	o	]	]	·	o£
U¨u] UVu	W}0Xn} p}_@_ċcn	µU	µb}nVbN	]	k	]	V	]	]	·	o¨
	d0jc9 [9}h9j c9	µU	µb}nVbN	U	©	]	©	]	V	·	o¨
UUu	S}9j§_ɐ0c ?«@e¾c	µU	µ | 9@ċ_H0	k	©	·	]	]	]	·	oo
U£u	d«c¾ɐ K9jc9j_j	µU	µb}nVbN	U	o	]	V	]	]	·	o·
U¢u	d9«}9 p0§}¾ɐcn®¾	µ£	µmbn^~i	U	©	]	]	]	]	·	¢
UPu	Kn}_¾j dn®_ċ	µ£	µb}nVbN	]	©	]	]	o	o	·	V