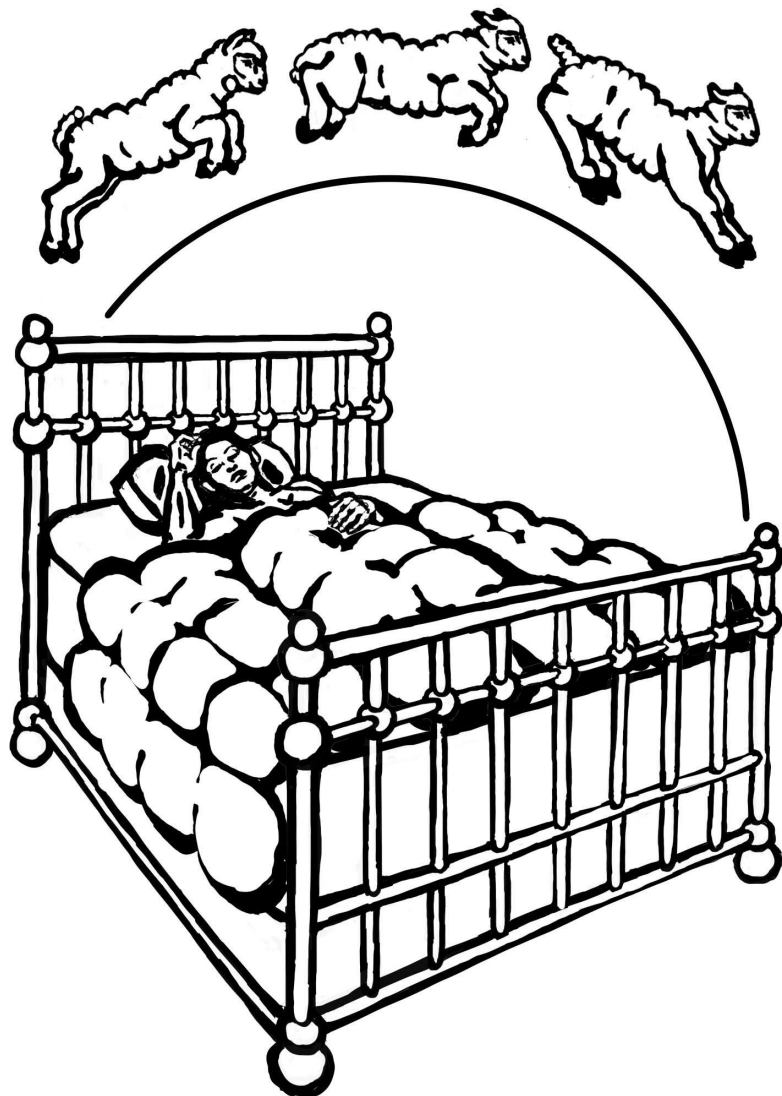


MALYNÁR

ČÍSLO 4 — ROČNÍK 34

malynar.strom.sk



Ahoj!

Práve sa ti dostal do rúk časopis MALYNÁR! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ kopec zábavy a zaujímavých hier. Ak si štvrták, piatak alebo šiestak, je presne pre teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým! V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na tvoje riešenia!

vedúci MALYNÁRa

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústreďeniach...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cielavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispedia k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia <https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/> a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na info@strom.sk.

Ďakujeme!

PriMaT

Aj tento rok sa opäť uskutoční PriMaT, a to v termíne od 7. júla do 11. júla 2025. Spolu so svojimi kamarátmi na ňom zažiješ množstvo súťaží i zaujímavých hier. Nebudú chýbať športy, výlety, zážitky, tvorivé aktivity a čas si nájdeme aj na trochu matematiky.

Aktuálnu prihlášku, informácie o priebehu aj organizácií môžete nájsť tu:

<https://malynar.strom.sk/dennytabor/>.

Pravidlá súťaže

Korešpondenčný matematický seminár **MALYNÁR** je súťaž pre žiakov 4. až 6. ročníka základných škôl, resp. prímy osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj mladší žiaci, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako štvrtáci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš aj svoje opravené a obodované riešenia, ak si ich posielal elektronicky.

Aby sme ti celý proces registrácie a vyplnenia profilu na našej stránke uľahčili, vytvorili sme na stránke seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf jednoduchý návod.

Ako písať riešenie

Úlohy rieš samostatne, neodpisuj a ani nikomu nedávaj odpisovať, pretože za to **budeme strhávať body**. Výsledok úlohy, aj keď je správny, **nestačí**. Tvoje riešenie musí obsahovať podrobný **myšlienkový postup** – vysvetlenie, ako si pri riešení úlohy postupoval. Slovom rozhodne nešetri. Nezabúdaj, že ak má byť tvoje riešenie matematicky správne, tak musí obsahovať **presné výpočty**, takže čísla, s ktorými počítáš, nemôžu byť zaokrúhlené alebo odmerané pravítkom. Zároveň opravovateľ musí **vedieť skontrolovať** tvoje riešenie za **primeraný čas**, takže priložiť 100 000 možností vypísaných počítačom nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov.

Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4, ak je na viacerých listoch, zopni ich. Texty zadaní odpisovať nemusíš. Každé riešenie musí mať v hlavičke **tvoje meno, triedu, školu a číslo úlohy**. Riešenia posielaj na adresu:

Združenie STROM, PF UPJŠ Jesenná 5, 041 54 Košice.

Pod odosielateľa uveď výrazne **MALYNÁR**.

Riešenia môžeš taktiež nahrávať pomocou založeného účtu na našej webovej stránke malynar.strom.sk. Všetky riešenia môžeš odovzdávať do 20.00. Dbaj na presné

dodržanie termínu odovzdania, či už budeš riešenia posielat poštou, alebo nahrávať cez web (za oneskorenie ti budeme strhávať body). V prípade technických problémov na našej strane posielaj riešenia na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk s predmetom **MALYNÁR** vo formáte PDF (každé riešenie v samostatnom súbore) najneskôr v deň termínu série do 20.00. Riešenia budú prijaté a opravené len v prípade, že tvoj profil je kompletne vyplnený.

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **šiestaci a príma:** všetky vyriešené úlohy,
- **piataci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh,
- **štvrtáci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh.

Tretiaci a mladší budú hodnotení rovnako ako štvrtáci.

V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením svojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia mailom na adresu malynar@strom.sk zaslať sťažnosť a tá bude prešetrená.

Príklad

Traja bratia, šiestak Vlado, piatak Jaro a štvrták Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasně, nie?

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú podľa dĺžky omeškania nasledovne.

- Do 24 hodín: udeľujeme $2/3$ bodov zaokrúhlené nahor.
- Viac ako 24 hodín a do štyroch dní: $1/2$ bodov zaokrúhlenú nahor.
- Viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme.

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Webová stránka

Ak máš nejaké otázky na nás alebo k zadaniam, tak neváhaj navštíviť naše webové stránky. Pri každej úlohe je diskusia, ktorá slúži na to, aby si sa mohol opýtať na nejasnosti ohľadom zadaní. Ďalšia možnosť, ako nás kontaktovať, je mailom na adresu malynar@strom.sk.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Sústredenie je určené najmä pre štvrtákov až šiestakov na základných školách (a žiakov zodpovedajúcich ročníkov na viacročných gymnáziách), mladší žiaci môžu byť pozvaní ako náhradníci. V prvom rade sú pozvaní víťazi Mamuta a tí riešitelia **MALYNÁRŤU**, ktorí získali v semestri aspoň 30 bodov. Ďalší účastníci sú pozývaní podľa poradia Mamuta. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia alebo riešiteľov, ktorí nedosiahli hranicu 30 bodov alebo riešiteľov súťaže *Máš problém?!*, ktorí sa v svojej kategórii umiestnili na jednom z prvých troch miest.

Účast na sústredeň je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžu organizátori účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Pár dobrých rád

Tu je zopár tipov a trikov, o ktorých si myslíme, že ti v budúcnosti pomôžu.

Základom je pochopiť zadanie

Ak si už niekoľkokrát čítaš zadanie, no stále si s ním nevieš dať rady, máš tieto možnosti:

- Opýtaj sa svojich rodičov. Ver alebo nie, väčšinou ti dokážu pomôcť s pochopením zadania.
- Opýtaj sa nás. Nájdi danú úlohu na našej stránke a v sekcii diskusia sa nás môžeš opýtať. Vždy ti radi pomôžeme.

Skúšať, skúšať, skúšať...

Možno to znie prekvapivo, pretože vetu „Skúšal som a vyšlo mi,“ alebo „Prišiel som na to skúšaním,“ uvidíme v tvojom riešení obvykle neradi. Ale skúsiť si dosadiť nejaké konkrétne čísla nie je vôbec zlý začiatok. Takéto dosadzovanie rôznych hodnôt, až kým nenarazíš na správny výsledok, však nie je matematický postup, ktorý by sme hodnotili veľkým počtom bodov. Je to spôsob, ktorý je tu pre teba, aby ti ukázal, o čo približne v úlohe pôjde, ak na začiatku nevieš, ako ju vyriešiť.

Kresliť, kresliť, kresliť...

Ak si príklad nakreslíš, môže ti to veľmi pomôcť. Nie vždy je ľahké si úlohu predstaviť. Bude sa ti jednoduchšie rozmýšľať, ak to, čo máš napísané v zadaní, uvidíš na obrázku priamo pred sebou. Kreslenie ti ukáže nové spôsoby, ako sa na príklad dá pozrieť. Obrázok, najmä pri geometrických úlohách, však slúži iba ako pomôcka. Nespoliehaj sa pri riešení na presné rysovanie či kreslenie a radšej pripoj vysvetlenie, prečo znázornené fakty skutočne platia.

Aha, na niečo som asi prišiel!

Dôležité je vysvetliť, čo to vlastne je, prečo to tak funguje a hlavne názorne ukázať, ako si prišiel na to, že je to pravda. Ak to vieš vysvetliť aj po matematickej stránke, tak je to obrovské plus. Tak totiž vzniká 9-bodové riešenie. Správne riešenie tiež musí úplne zodpovedať na otázku, na ktorú sa pýta zadanie. Ak napríklad chceme dokázať, že niečo platí pre všetky čísla, nestačí ukázať, že to platí pre 5 konkrétnych. Rovnako je dôležité dávať pozor na to, aby si vysvetlil každý krok v riešení. Pri spisovaní úlohy sa ti niektoré veci zdajú zjavné, pretože si ju už predtým vyriešil. Správne riešenie by však mal pochopiť hocikto, kto si práve prečítal zadanie.

Všetko si skontroluj

Ak si našiel výsledok, o ktorom si myslíš, že je správny a máš aj postup, ako si naň prišiel, tak tvoje riešenie je už skoro hotové. Teraz však prichádza dôležitá časť! Všetko si skontroluj! Logická či numerická chyba ostane vždy chybou, ak ju prehliadneš. Daj si tiež pozor, aby si aj napriek správne mu riešeniu nakoniec neodpovedal na inú otázku, než na ktorú sme sa v zadaní pýtali. Na to, aby sme riešenie vedeli opraviť, mu musíme rozumieť, preto skontroluj, či tvoje riešenie neobsahuje nejaké nevysvetlené označenia a či je čitateľné.

Ak sme ti do komentára v tvojom riešení napísali, že z tvojho riešenia nám nie je jasné, ako si postupoval, neber to tak, že sme ňa pochopiť nechceli. Riešeniam spravidla rozumieme, no plný počet dostane len ten, kto dokáže vysvetliť, prečo je správne.

Zadania 1. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do 17. marca 2025

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na malynar.strom.sk.

Pri riešení a spisovaní úloh prihliadaj len na informácie v zadaní konkrétnej úlohy, neopieraj sa o fakty, ktoré sa dozvieš v príbehu.

Vedúci Štyri sa snažil zaspáť, a tak začal počítať ovečky. Išiel postupne, jednu za druhou, a predstavoval si, ako preskakujú ponad plot. Postupne však prestal počty sledovať; vedel len, že sa zhodujú s počtom ovečiek z turnaja, ktorý si predstavil, aby zaspal deň predtým.

Úloha 1

Ovečky boli na turnaji, kde hrali niekoľko zápasov. Každý zápas hrali dve ovečky, z ktorých jedna vyhrala a druhá prehrala. Každá ovečka, ktorá dvakrát prehrala, bola z turnaja vyradená. Po 45. zápase zvýšila už len jediná ovečka, ktorá sa teda stala víťazkou. Zistite, či mohla víťazná ovečka prejsť celým turnajom bez prehry a určte, koľko bolo ovečiek v turnaji. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Keď Štyri zistil, koľko ovečiek popreskakovalo v jeho mysli, uvedomil si, že ešte nespí. Keďže mu počítanie ovečiek nepomohlo, začal sa prechádzať po svojej mysli, až narazil na kruh kravičiek a mačičiek. Priblížil sa k nim, a keď si ho všimli, zaviazali mu oči a prikázali mu rozlúštiť, koľko je ktorých zvieratiek v tomto kruhu na základe náповied.

Úloha 2

Kravičky sú poctivé a vždy hovoria len pravdu, avšak mačičky sú prefíkané, a tak vždy klamú. Vieme, že všetkých spolu je dokopy 10 a že sedia v kruhu tak, že každé zvieratko vidí 9 ďalších. Päť z nich vyhlási:

- „Vidím práve jednu mačičku.“
- „Vidím práve päť kravičiek.“
- „Vidím dvakrát toľko mačičiek ako kravičiek.“
- „Vidím práve sedem mačičiek.“
- „Vidím práve deväť kravičiek.“

Päť zvieratiek, ktoré mlčia, je rovnakého druhu. Päť zvieratiek, ktoré hovoria, nie je rovnakého druhu. Určte koľko kravičiek je v kruhu a vysvetlite prečo to nemôže byť iný počet.

Keď mu rozviazali oči, sadol si k nim a začal sa s nimi rozprávať o hviezdach a súhvezdiach. Mačičky ukázali na jedno a tvrdili, že je to Vodnár, na čo ich hneď kravičky opravili, že to sú Ryby. Zrazu Štyrimu zablúdil pohľad na jedno divné súhvezdie. Nevedel si spomenúť na jeho názov, ale vedel, že to zistí podľa vzdialeností hviezd. A tak sa pustil do počítania.

Úloha 3

V súhvezdí tvaru obdĺžnika $ABCD$ so stranou AD dĺžky 5 leží bod P tak, že trojuholník APD je rovnostranný. Keď si predĺžime úsečku AP , tak pretne stranu CD v bode E , pričom úsečka CE meria 5. Určte, aká dlhá je úsečka AE a aká je veľkosť uhla AEB .

S touto úlohou vám môže pomôcť edukačné okienko, ktoré je na konci časopisu.

Bolo to súhvezdie Veľkého Spáča, čo mu pripomenulo jeho úlohu. Rozlúčil sa so zvieratkami a išiel ďalej hľadať spôsob, ako zaspáť. Blúdil zákutiami svojej mysle, až stretol Martina spolu s mnohými ďalšími vedúcimi. Keď Štyri prišiel k Martinovi, ten mu navrhol, aby si zahrali hru. Štyri súhlasil v nádeji, že sa unaví.

Úloha 4

Martin a Štyri hrajú hru, v ktorej sa striedajú v ťahoch počnúc Martinom. Vytvorí kruh so 123 ďalšími vedúcimi a v každom ťahu musí hráč poslať von z kruhu práve jedného zo svojich susedov vľavo alebo vpravo. Vyhrá ten, kto pošle toho druhého von z kruhu. Pre ktorého z hráčov existuje výherná stratégia a aká? Výherná stratégia je postup, podľa ktorého, keď jeden hráč hrá, tak vyhrá bez ohľadu na ťahy súpera.

Po štyristoštyridsiatich štyroch kolách sa Štyri rozhodol ísť ďalej. Prešiel dlhý kus svojej mysle, keď narazil na obrovskú vežu, ktorá sa tiahla od zeme až k hviezdám. Bola postavená zo šedých kamenných tehál, s občasnými červenými tehľami rozmiestnenými náhodne, čo bolo zvláštne, no ešte podivnejší bol jej tvar.

Úloha 5

Veža má tvar osemuholníka, ktorého uhly sú všetky tupé (majú viac ako 90° a zároveň menej ako 180°) a žiadne dva nie sú rovnako veľké. Navyše platí, že veľkosť každého z uhlov je násobkom 9. Určte veľkosti všetkých uhlov.

S touto úlohou vám môže pomôcť edukačné okienko, ktoré je na konci časopisu.

Keď vstrebával tento zvláštny tvar, začal kráčať smerom k veži. Ako sa k nej približoval, uvedomil si, že nemá jediné okno napriek svojej výške. Jediným otvorom v stenách boli malé drevené dvere priamo pred ním. Pokúsil sa ich otvoriť, ale ani sa nepohli. Všimol si na nich zvláštny zámkový mechanizmus.

Úloha 6

Na zámku bola vyrytá číselná os s číslami a na nej spomedzi všetkých čísel vyznačených 15 z nich: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384. Na otvorenie dverí je potrebné označiť také číslo, ktoré malo najmenší súčet vzdialeností od všetkých 15 zvýraznených čísel. Ktoré to je číslo?

Keď označil správny bod, dvere vydali zvláštny zvuk a s vŕzganím sa otvorili. Keď Štyri vstúpil, uvidel len nekonečné schody. Nebol z toho nadšený, ale nezostávalo mu nič iné, len sa po nich vydať smerom k vrcholu.



Zadania 2. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do 14. apríla 2025

Po niekoľkohodinovom zdolávaní schodov sa Štyri konečne dostal na ich koniec. Za posledným schodom ho čakala malá klávesnica na zadávanie čísel. Pri dôkladnejšom skúmaní si všimol nápis vyrytý na jej spodnej strane.

Úloha 1

Na odomknutie dverí nájdite a zadajte najväčšie číslo, pre ktoré platí, že:

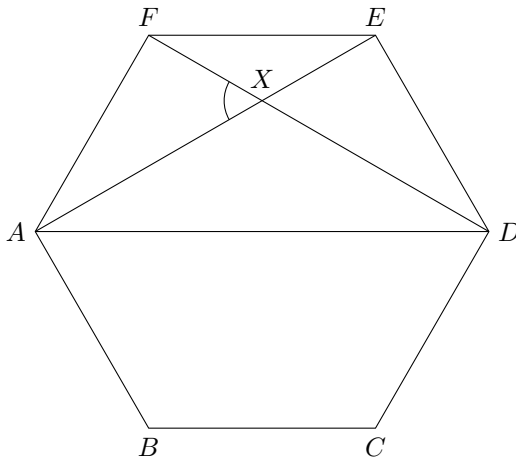
- Každá cifra sa v ňom nachádza najviac 2-krát,
- súčin každých dvoch cifier je nepárny,
- súčet všetkých cifier je nepárny,
- dve rovnaké cifry sa nenachádzajú vedľa seba.

Po zadaní čísla na tabuľku sa ozvalo cinknutie a dvere sa odomkli. Štyri ich otvoril a pred ním sa zjavila miestnosť plná flaštičiek, skúmaviek a s veľkým kotlom v zadnej časti miestnosti. Avšak to nebolo až také zvláštne ako jej tvar.

Úloha 2

Miestnosť mala tvar pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ a v nej sa nachádzal koberec tvaru štvoruholníka $ADEF$. Určte veľkosť uhla AXF , ak je bod X priesečník uhlopriečok v štvoruholníkovom koberci $ADEF$.

S touto úlohou vám môže pomôcť edukačné okienko, ktoré je na konci časopisu.



Po spamätaní sa z tohto divného javu sa rozhodol vstúpiť dnu. Keď prešiel oboma nohami za prah, zjavila sa pred ním postava v kúdeli dymu. Ako sa dym rozplýval, Štyri rozpoznal postavu pred ním – bola to Kristín. Povedal jej, čo sa pokúšal dosiahnuť celú noc, a Kristín mu ponúkla riešenie. Vie namiešať elixír spánku, avšak niektoré značky na ingredienciách v tabuľke sa jej zmazali. Vie len to, že značky sa rovnajú obsahom jednotlivých políčok.

Úloha 3

Tabuľka je rozdelená na rôzne veľké políčka, ktorých strany majú celočíselné dĺžky. Čísla uvedené v políčkách predstavujú ich obsah. Určte obsah prázdnych políčok. Veľkosti políčok v obrázku sú len orientačné.

39		
		16
	12	8
21	30	

Ako Štyri dopĺňal poslednú značku v tabuľke, Kristín mu povedala, že potrebuje sedem ingrediencií, avšak nie je si už istá, v akom poradí ich treba hodiť do kotla. Vie len pár indícií.

Úloha 4

7 ingrediencií – Aprénium, Budnocium, Cemspacium, Denebudium, Energiium, Fujdenium a Goodnightium – idú do kotla v nejakom poradí. Platí, že:

- Budnocium aj Cemspacium idú po Denebudiu
- počet ingrediencií medzi Goodnightiom a Cemspaciom je o jedno menší ako dvojnásobok počtu medzi Fujdeniom a Budnociom
- počet ingrediencií vhođených pred Apréniom by sa vedel medzi sebou zoradiť šiestimi rôznymi spôsobmi
- počet ingrediencií, ktorý ide do kotla pred Energiom, je polovičný v porovnaní s počtom tých, ktoré idú po ňom

Zistite, v akom poradí treba ingrediencie dať do kotla a ukážte, že žiadne iné správne poradie neexistuje.

Po zistení správneho poradia dali ingrediencie do kotla a teraz museli čakať, takže sa rozhodli pozeráť futbalové zápasy. Počas pozerania si zapisovali informácie o zápasoch, avšak uvedomili si, že sa pomýlili v zápisoch. Keďže ešte mali čas, pustili sa do opravovania chýb.

Úloha 5

Tímy Ahojnia, Budespacko, Caronocko a Dobruria hrali každý s každým práve raz v futbalovom turnaji. V tabuľke nižšie vidíme súhrnné informácie o výsledkoch zápasov. Práve jedno číslo v stĺpci strelené góly je však chybné. Zistite, aké bolo skóre jednotlivých zápasov a vysvetlite, prečo to inak nemohlo byť.

	Výhry	Remízy	Prehry	Strelené góly	Inkasované góly
Ahojnia	3	0	0	6	0
Budespacko	0	2	1	3	6
Caronocko	1	1	1	4	4
Dobruria	0	1	2	0	2

Chvíľu po tom, ako dokončili opravu tabuľky, sa elixír dovaril. Išli ho nabrať z kotla, ale v tom sa Štyri šmykol a zničil papier o dávkovaní. Jediné, čo ostalo, bol návod, ako elixír nájsť.

Úloha 6

Na stole sú poháre s množstvom elixíru 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Štyri si v každom kroku vyberie ľubovoľné dva poháre na tabuľi, vyleje ich a namiesto toho do nového pohára naleje množstvo elixíru rovné rozdielu predchádzajúcich množstiev. Tento proces opakuje, až dokým na stole nezostane už len jeden pohár.

- Určte, či môže byť na stole len prázdny pohár (množstvo elixíru je 0). Ak áno, ukážte ako. Ak nie, vysvetlite prečo.
- Určte, aké najväčšie množstvo elixíru môže ostať v poslednom pohári, uveďte aj postup prelievania a prečo nemôže byť väčšie.

Keď spoločne zistili správnu dávku, naliali ju do pohára a Štyri sa rozlúčil s Kristín. Potom sa vydal späť po schodoch, vyšiel z veže a prechádzal okolo Martina a ostatných vedúcich, prešiel okolo kravičiek a mačičiek, ktoré sa s ním rozlúčili. Nakoniec prišiel späť k ovečkám, kde začala jeho cesta za spánkom. Sadol si na zem, pripravil sa vypiť elixír, a v tom momente zacítil hrejivosť ranného slniečka na zavretých viečkach a uvedomil si, že už je ráno. Tak po celej neprespanej noci musel vstávať a pokračovať vo vedúcovaní.

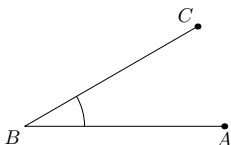
Edukačné okienko

Uhly

Predstavte si obyčajné ručičkové hodinky s dvoma ručičkami – hodinovou a minútovou. Tieto ručičky sa pohybujú rôznymi rýchlosťami, takže počas dňa sa nachádzajú v rôznych vzájomných polohách. Niekedy sa napríklad prekrývajú a niekedy ukazujú úplne opačným smerom. Chceli by sme vedieť nejako popísať, v akej polohe sú tieto ručičky. Nevieme zistiť ich vzdialenosť, keďže ručičky majú v strede hodiniek spoločný začiatok a potom sa od seba postupne vzdalujú. Ale môžeme si všimnúť, že ručičky stále rozdelia hodinky na dve časti. Budeme hovoriť, že ručičky vytvárajú uhol, pričom uhol je tá plocha medzi ručičkami. Keďže ručičky rozdelili hodinky na dve časti, tak vidíme že ručičky vytvorili dva uhly, ktoré môžu mať inú veľkosť. My sa však budeme zaoberať menším z týchto dvoch uhlov.

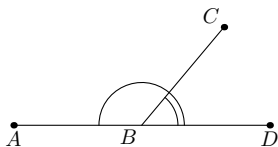
Uhol má svoju veľkosť a jednotku, ktorú používame, keď ju chceme určiť, nazývame **stupne**, tak ako napríklad používame metre, keď chceme zistiť dĺžku. Keď chceme zapísať 1 stupeň, napíšeme to ako 1° . Veľkosť uhla, ktorý tvoria celé hodinky (nerozdelené ručičkami) je 360° . Takže keď za hodinu minútová ručička prejde celý kruh, tak môžeme povedať, že prešla 360° . Keď ručičky rozdelia hodinky na dve presne rovnaké časti, tak oba uhly, ktoré vytvárajú majú veľkosť 180° . Vtedy tieto ručičky ležia na jednej priamke a takému uhlu preto hovoríme aj **priamy uhol**.

Uhly nevytvárajú len ručičky na hodinkách, ale aj úsečky, ktoré majú spoločný bod, aj priamky, ktoré sa pretínajú. Uhly vieme nájsť aj v rôznych útvaroch, napríklad štvorec má 4 uhly, jeden pri každom svojom vrchole. Uhol na obrázku vyznačujeme oblúčikom. Uhly budeme nazývať pomocou troch bodov: prvý bude bod na jednej z priamok, druhý bude bod, ktorý majú spoločný a tretí bude bod na druhej priamke (vždy to pomenujeme tak, aby spoločný bod priamok bol zapísaný v strede nášho uhla). Na obrázku vidíme uhol ABC (alebo aj CBA).

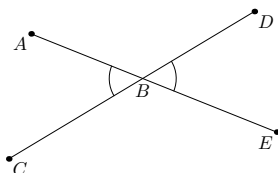


Teraz sa pozrime na nejaké základné fakty, čo platia o uhloch:

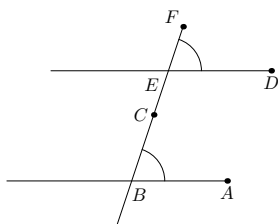
1. Vyznačené uhly na obrázku nazývame **susedné**. Platí pre nich, že ich súčet je 180° , lebo dokopy vytvárajú priamy uhol ($|\angle ABC| + |\angle CBD| = 180^\circ$).



2. Uhly na obrázku nazývame **vrcholové** a platí pre nich, že majú rovnakú veľkosť ($|\angle ABC| = |\angle DBE|$).



3. Keď máme dve rovnobežné priamky, ktoré pretína tretia priamka tak ako na obrázku, tak takéto uhly nazývame **súhlasné**. Tieto uhly majú rovnakú veľkosť ($|\angle CBA| = |\angle FED|$).



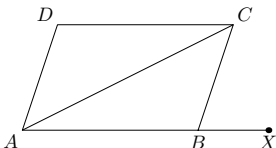
Teraz sa pozrime, ako vieme použiť tieto znalosti v úlohe.

Návodná úloha 1

V rovnobežníku $ABCD$ je strana AB rovnobežná so stranou CD a strana BC je rovnobežná so stranou AD . Aká je veľkosť uhla ABC , ak viete, že veľkosť uhla CAD je 42° a veľkosť uhla CAD je dvakrát väčšia ako veľkosť uhla BAC . Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

Riešenie návodnej úlohy 1

Rovnoběžník je štvoruholník, ktorého obe dvojice protilahlých strán majú rovnakú veľkosť a sú rovnobežné. Keďže vieme, že uhol CAD je dvakrát väčší ako uhol BAC a uhol CAD má veľkosť 42° , tak uhol BAC má veľkosť 21° . Uhly BAC a CAD spolu vytvárajú uhol BAD . Takže uhol BAD má veľkosť $42^\circ + 21^\circ = 63^\circ$. Teraz si môžeme predĺžiť úsečku AB a vyznačiť si bod X tak, aby nám tam vznikol uhol CBX . Všimnime si, že uhly BAD a XBC sú súhlasné, lebo úsečky AD a BC sú rovnobežné a úsečka AX ich pretína. Preto veľkosť uhla XBC je rovnaká ako veľkosť uhla BAD , teda 63° . Nakoniec použijeme to, že uhly ABC a XBC sú susedné, lebo spolu vytvárajú priamy uhol. Preto ich súčet musí byť 180° . Veľkosť uhla XBC poznáme, preto ľahko dopočítame veľkosť uhla ABC : $180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.



Pri riešení tejto úlohy sme si mohli všimnúť, že súčet uhlov ABC a BAD je 180° . Toto platí pre všetky rovnobežníky, takisto ako to, že protilahlé uhly v rovnobežníku majú rovnakú veľkosť. Môžete sa zamyslieť, prečo to vždy platí.

Ďalšia vec, ktorá sa často používa v úlohách je fakt, že **súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°** . Čo sa týka trojuholníkov, tak poznáme aj dva špeciálne typy, v ktorých platia isté fakty. **Rovnostranný trojuholník** je taký trojuholník, ktorého všetky strany sú rovnako dlhé a všetky uhly majú rovnakú veľkosť (Akú?). **Rovnoramenný trojuholník** je taký trojuholník, ktorého niektoré dve strany majú rovnakú veľkosť. Potom aj dva uhly, ktoré zvierajú tieto strany s tretou stranou (nazývame ju základňa), majú rovnakú veľkosť. Pozrime sa, ako tieto znalosti môžeme použiť v úlohe.

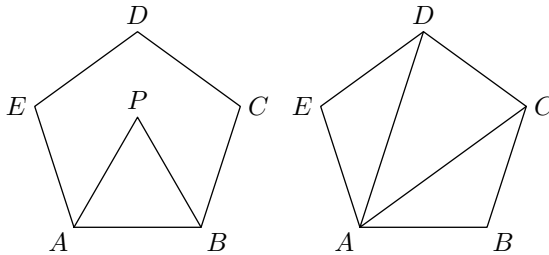
Návodná úloha 2

Je daný pravidelný päťuholník $ABCDE$ a v ňom rovnostranný trojuholník ABP . Aký veľký je uhol PBC ? Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

Riešenie návodnej úlohy 2

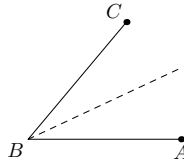
Keďže vieme, že súčet všetkých uhlov v trojuholníku je 180° a uhly v rovnostrannom trojuholníku sú rovnako veľké, tak každý uhol v rovnostrannom trojuholníku musí mať veľkosť $180 : 3 = 60^\circ$. Preto každý uhol v trojuholníku ABP

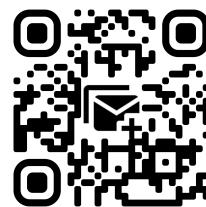
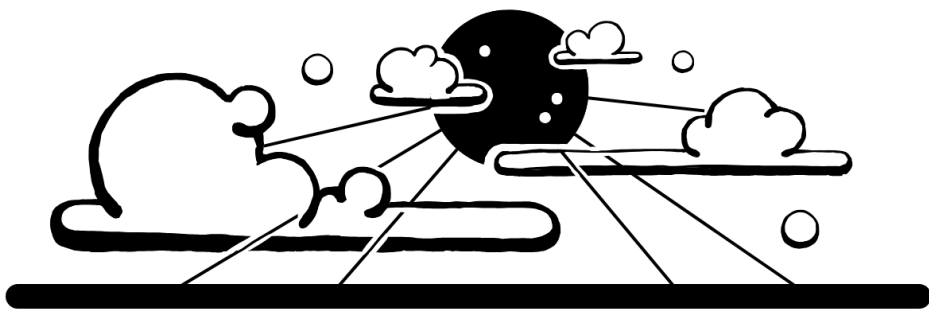
je 60° . Všimnime si, že uhol ABP a uhol PBC spolu vytvárajú uhol ABC , čo je uhol v pravidelnom päťuholníku. Pre pravidelný päťuholník (tak ako aj pre každý pravidelný mnohoúhelník) platí, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé a všetky uhly rovnako veľké. Päťuholník si vieme rozdeliť na tri trojuholníky, ktorých všetky vrcholy sú vrcholmi päťuholníka. Všimnime si, že keď spočítame všetky uhly týchto trojuholníkov, tak sme vlastne spočítali všetkých 5 uhlov päťuholníka. No ale keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180° , tak súčet uhlov v 3 trojuholníkoch bude $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Preto súčet 5 uhlov päťuholníka je 540° . Keďže tieto uhly sú rovnako veľké, tak jeden uhol pravidelného päťuholníka má veľkosť $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Teda uhol ABC má veľkosť 108° . Teraz už vieme vypočítať veľkosť uhla PBC ako rozdiel uhlov ABC a ABP , lebo ABP a PBC spolu vytvárajú uhol ABC . Veľkosť uhla PBC je $108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$.



Podobným postupom si vieme vypočítať súčet uhlov v hocijakom mnohoúhelníku, stačí keď si ho rozdelíme na trojuholníky, ktorých vrcholy sú vrcholmi mnohoúhelníka.

Posledná vec, ktorú si spomenieme je os uhla. **Os uhla** ABC je priamka, ktorá rozdeľuje uhol ABC na dva rovnako veľké uhly. Do obrázku sa väčšinou zakresľuje prerušovanou čiarou.





Názov:	MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2025 • Letný semester 34. ročníka
Web:	malynar.strom.sk
E-mail:	malynar@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese riesenia@strom.sk
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.