



Milí riešitelia,

Nebudeme si klamať, ani si nič nahovárať, škola sa začala. Môžete sa pokúsiť schovať pod lavicou, snažiť sa pri odpovedi splynúť s tabuľou, alebo sa tváriť ako monitor počítača. Nič z toho vám ale nepomôže, pretože vedomosti a známkovanie si vás nájdú ešte neúprosnejšie, ako si Steven Seagal hľadá svoje obete v kultovom filme *Prepadnutie v Pacifiku* (odporúčame si pozrieť najmä scénu *Knife fight*). Takže čo robiť potom, ako sa zmierime s takýmto osudom? Veru tak, nič nepomôže viac, ako uniknúť na chvíľu z reality do sveta matematiky, kde vás čaká dvanásť nových príkladov nášho semináru. Ba čo viac, na konci cesty je pre najlepších z vás pripravené sústredenie, na ktoré sa nezabúda. Takže rob, čo chceš, ale hlavne rieš! To máš ako darček od nás, tak prestaň pozeráť *Pokémon*, čapicu si daj dolu z hlavy a ideme na to.

váš **STROM**

Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž Talentovaných Riešiteľov Obľubujúcich Matematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme *Matboj*, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdú svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. **STROM** je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešite zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posilať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk vo formáte PDF. Všetky úlohy môžete poslať jedným e-mailom; do predmetu napíšte (bez diakritiky) STROM - vaše priezvisko. Prílohy označte svojím priezviskom, sériou a číslom príkladu. Napríklad riešiteľ Jožko Mrkvicka pošle e-mail s predmetom **STROM - Mrkvicka** a jeho prílohy (riešenia úloh 2 a 5) budú označené **Mrkvicka_1seria_2uloha.pdf** a **Mrkvicka_1seria_5uloha.pdf**.

Vaše riešenia musia dôjsť do 22:00 v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete.

Riešitelia, ktorí svoje riešenia pošlú elektronicky, dostanú opravené riešenia e-mailom na adresu, z ktorej svoje riešenia poslali.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva: všetky vyriešené úlohy

treťiaci, septima: všetky vyriešené úlohy

druháci, sexta: päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh

prváci, kvinta: päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro ($3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4$) + 2 = 20 bodov a Marcel ($3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4$) + 5 = 23 bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhľujeme nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetraná.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitou) získajú –1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým opakované za odpisovanie strhneme body. Po ich vydedení počtom odpisujúcich dostanú –3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to –5 hlasov za každú odpísanú úlohu. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou!

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú

maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROM**u vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov.

Zadania úloh letného semestra 37. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **25. 3. 2013**

1. Je dané reálne číslo $a > 0$ také, že nerovnosť $1 < ax < 2$ má 3 celočíselné riešenia (pre neznámu x). Pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}_0$ sa môže stať, že nerovnosť $2 < ax < 3$ má práve n celočíselných riešení? Nájdite všetky možnosti.
2. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k . Označme D, E, F postupne priesečníky osí uhlov pri vrcholoch A, B, C s kružnicou k . Dokážte, že AD je kolmé na EF .
3. Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami, pre ktorý platí, že $P(0)$ a $P(1)$ sú nepárne. Dokážte, že polynóm P nemá žiaden celočíselný koreň.
Ak nevieš, čo je to polynóm, odporúčame ti pozrieť si materiál na stránke <http://seminar.strom.sk>
4. Na konci školského roka sa zistilo, že z ľubovoľne zvolenej skupiny aspoň piatich študentov vieme vybrať najviac 20% študentov tejto skupiny, ktorí dostali spolu viac ako 80% známok F v tejto skupine. Dokážte, že aspoň $3/4$ všetkých známok F dostal jeden študent.
5. Označme v trojuholníku ABC ortocentrum H , stred vpísanej kružnice I , stred opísanej kružnice O . Ďalej označme K bod dotyku vpísanej kružnice a strany BC . Dokážte, že ak priamka IO je rovnobežná s priamkou BC , tak priamka AO je rovnobežná s priamkou HK .
6. Nekonečnú postupnosť prirodzených čísel nazveme Šupapostupnosťou, ak pre každý člen počnúc tretím platí, že je súčtom dvoch predchádzajúcich členov. Existuje taký
 - konečný
 - nekonečnýpočet Šupapostupností, aby každé prirodzené číslo bolo práve v jednej z nich?

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **29. 4. 2013**

1. Daný je obdĺžnik $ABCD$, M a N sú stredy strán BC a AD . Na polpriamke CA za bodom A zvolíme bod K . Označme L priesečník úsečiek KM a AB . Dokážte, že $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LNA|$.
2. Nájdite všetky mocniny dvojky, z ktorých sa dá preusporiadaním číslic dostať iná mocnina dvojky. (Nuly na začiatku nie su povolené, napr. 0032 nebudeme považovať za číslo.)

3. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami s vlastnosťou $P(a) = P(b) = P(c) = -1$, kde a, b, c sú nejaké navzájom rôzne celé čísla. Dokážte, že polynóm P nemá žiaden celočíselný koreň.
4. Máme kocku so stranou dlhou $n \in \mathbb{N}$, ktorá je postavená v súradnicovej sústave tak, že jeden jej vrchol je v bode $(0, 0, 0)$ a iný v bode (n, n, n) . Potrebujeme sa dostať z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (n, n, n) . Pohybovať sa môžeme len po povrchu kocky a len po úsečkách spájajúcich susedné body s celočíselnými súradnicami. (Dva body s celočíselnými súradnicami sú susedné, ak sa líšia len v jednej súradnici a tento rozdiel je 1.)
- Aká je dĺžka najkratšej takejto cesty z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (n, n, n) ?
 - Koľko je rôznych najkratších ciest?
5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC , kde $|AB| = |AC|$. Označme M stred úsečky BC . Nech X je bod na kratšom oblúku MA kružnice opísanej trojuholníku ABM . Nech T je vnútorný bod uhla BMA , pre ktorý $\angle TMX = 90^\circ$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že hodnota rozdielu $|\angle MTB| - |\angle CTM|$ nezávisí na voľbe X .
6. Nech k, n sú prirodzené čísla, pričom k je nepárne. Dokážte, že súčet $1^k + 2^k + \dots + n^k$ je deliteľný súčtom $1 + 2 + \dots + n$.

Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2013 • Letný semester 37. ročníka (2012/2013)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	http://www.strom.sk
E-mail:	zdruzenie@strom.sk