STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMáci

Vianočný Maxiklub

Tradične v čase Vianoc sa bude konať Vianočný Maxiklub, čo je vianočné stretnutie stromákov! Vítaní sú všetci, účastníci, vedúci, bývalí vedúci a každý, kto má rád STROM a stromákov. Stretneme sa 28. 12. o 14:00 v miestnosti P19 na PF UPJŠ na Jesennej 5 v Košiciach, ktorá nám bude k dispozícii do 18:00. Okrem seba nezabudnite doniesť aj vianočnú náladu a nejaké fajné jedlo, určite sa zíde.

1.

Opravovali: **Martin Šmilňák a Bianka Gurská**
Počet riešení: 37 Najkrajšie riešenie: **Michal Vodička**

Číslo nazývame k-rásne, ak ho vieme zapísať ako súčet k po sebe idúcich kladných celých čísel (napríklad číslo 9 je 2-rásne, pretože $9 = 4 + 5$, a zároveň je 3-rásne, pretože $9 = 2 + 3 + 4$).

a. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ je naraz 3-rásnych, 4-rásnych a 5-rásnych?

b. Existujú nejaké kladné celé čísla, ktoré sú naraz 3-rásne, 4-rásne, 5-rásne a 6-rásne?

Riešenie

a. Číslo je 3-rásne, ak existuje nejaké kladné celé k také, že sa dané číslo rovná súčtu $k + (k + 1) + (k + 2) = 3(k + 1)$. Z toho vyplýva, že všetky 3-rásne čísla musia byť deliteľné tromi, aj to, že všetky čísla deliteľné tromi (okrem čísla 3, keďže by potrebovalo $k = 0$) sú 3-rásne.

   4-rásne čísla sú tie, ktoré sa pre nejaké kladné celé k rovnajú súčtu $k+(k+1)+(k+2)+(k+3) = 4k+6 = 4(k+1)+2$. To sú práve čísla so zvyškom 2 po delení 4 s výnimkou čísla 2, keďže by opäť potrebovalo $k = 0$.

   5-rásne čísla sú tie, ktoré sa pre nejaké kladné celé k rovnajú súčtu $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4) = 5k+10 = 5(k+2)$. To sú práve čísla deliteľné 5 s výnimkou najmenších násobkov 5 a 10.

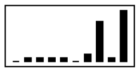
   Číslo je teda naraz 3-rásne, 4-rásne a 5-rásne práve vtedy, keď je aspoň 10, je deliteľné číslami 3 a 5 a dáva zvyšok 2 po delení 4. Všimnime si, že číslo dáva zvyšok 2 po delení 4, ak je deliteľné dvomi, ale už nie štyrmi. Hľadané čísla sú teda deliteľné číslami 3, 5 a 2 zároveň (teda sú deliteľné 30), no číslami 3, 5 a 4 zároveň už deliteľné nie sú (teda nie sú deliteľné 60).

   Násobkov 30 v množine $\{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ je $2010/30 = 67$ (keďže 2010 je najväčší z nich), pričom všetky sú aspoň 10. Zároveň aj násobkom 60 je $1980/60 = 33$ z nich. Počet hľadaných čísel je preto $67 - 33 = 34$.

b. 6-rásne čísla sú tie, ktoré sa pre nejaké kladné celé k rovnajú súčtu $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) + (k + 5) = 6k + 15 = 6(k + 2) + 3$. Všimnime si, že tento súčet je vždy nepárny, teda všetky 6-rásne čísla sú nepárne. Zároveň už ale vieme, že všetky 4-rásne čísla sú párne, preto nemôže existovať číslo, ktoré je naraz 4-rásne aj 6-rásne, teda ani také, ktoré je naraz 3-rásne, 4-rásne, 5-rásne a 6-rásne.

2.

Opravovali: **Braňo Ječim a Gertrúda „Mimi“ Hanusová**
Počet riešení: 32 Najkrajšie riešenia: **Marek Horváth a Michal Vodička**



Majme postupnosť kladných celých čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Pre všetky kladné celé k platí $a_{a_k} = 3k$.

a. Určte a_{1000}.

b. Určte a_{2024}.

Riešenie

Ak $a_1 = 1$, tak $a_{a_1} = a_1 = 1 \neq 3$, nastáva spor, keďže rovnosť zo zadania neplatí. Ak $a_1 \geq 3$, tak zo zadania musí platiť $a_{a_1} = 3$, z toho vyplýva, že existuje člen postupnosti s indexom aspoň 3, ktorý má hodnotu 3, to je ale spor, keďže naše $a_1 \geq 3$ a postupnosť je rýdzo rastúca. Ak $a_1 = 2$, tak $a_{a_1} = a_2 = 3$, to môže platiť a zároveň už poznáme druhý člen postupnosti $a_2 = 3$.

Ďalej postupne dosádzame do rovnice $a_{a_k} = 3k$ zo zadania (vždy za a_k dosadíme pred ním vypočítaný člen):

$$\begin{aligned}
a_{a_2} &= a_3 = 3 \cdot 2 = 6\\
a_{a_3} &= a_6 = 3 \cdot 3 = 9\\
a_{a_6} &= a_9 = 3 \cdot 6 = 18\\
a_{a_9} &= a_{18} = 3 \cdot 9 = 27\\
a_{a_{18}} &= a_{27} = 3 \cdot 18 = 54\\
a_{a_{27}} &= a_{54} = 3 \cdot 27 = 81\\
a_{a_{54}} &= a_{81} = 3 \cdot 54 = 162\\
a_{a_{81}} &= a_{162} = 3 \cdot 81 = 243\\
a_{a_{162}} &= a_{243} = 3 \cdot 162 = 486\\
a_{a_{243}} &= a_{486} = 3 \cdot 243 = 729\\
a_{a_{486}} &= a_{729} = 3 \cdot 486 = 1458\\
a_{a_{729}} &= a_{1458} = 3 \cdot 729 = 2187
\end{aligned}$$

Všimnime si, že medzi prvkami a_{729} a a_{1458} sa nachádza 728 prvkov a zároveň medzi hodnotami týchto prvkov 1458 a 2187 sa nachádza 728 kladných celých čísel. Keďže do našej rýdzo rastúcej postupnosti patria len kladné celé čísla, tak každému prvku z tohto intervalu patrí práve jedna konkrétna hodnota, a to: $a_{729+x} = 1458 + x$, pre $x \in \mathbb{Z} \cap [1, 728]$.

Z toho $a_{1000} = 1729$.

Tiež sa v tomto intervale nachádza aj $a_{1295} = 2024$. Preto ďalej vieme dopočítať $a_{a_{1295}} = a_{2024} = 3 \cdot 1295 = 3885$.

Iné riešenie

Všetky čísla v tomto riešení sú zapísané v trojkovej sústave.

Keby $a_1 = 1$, tak $1 = a_1 = a_{a_1} = 10$, čo je spor. Preto $1 < a_1$, a teda z rastúcosti postupnosti $a_1 < a_{a_1} = 10$. To už máme, že $1 < a_1 < 10$, čiže $a_1 = 2$ a ďalej $a_2 = a_{a_1} = 10$.

Indukciou dokážeme, že $a_{10^n} = 2 \cdot 10^n$ a $a_{2 \cdot 10^n} = 10^{n+1}$ pre všetky nezáporné celé n. Pre $n = 0$ to už máme dokázané. Ak to platí pre $n - 1$, tak $a_{10^n} = a_{a_{2 \cdot 10^{n-1}}} = 2 \cdot 10^n$ a $a_{2 \cdot 10^n} = a_{a_{10^n}} = 10^{n+1}$. Teraz $a_{2 \cdot 10^n} - a_{10^n} = 2 \cdot 10^n - 10^n$, takže na tomto úseku musia členy postupnosti byť po sebe idúce čísla a $a_{\overline{1x}} = \overline{2x}$ pre ľubovoľné n-číslie (nie n-ciferné číslo) x.

Keďže to platí pre všetky n, platí $a_{\overline{1x}} = \overline{2x}$, a teda aj $a_{\overline{2x}} = a_{a_{\overline{1x}}} = \overline{1x0}$ pre každý konečný reťazec cifier x (aj prázdny). Dosadením do explicitného vyjadrenia dostávame výsledky $a_{1101001} = 2101001$ a $a_{2202222} = 12022220$.

Komentár

Mnohí ste si po vypísaní prvých členov tejto postupnosti všimli jej zaujímavé vlastnosti, ktoré ste opísali vo svojich riešeniach. Avšak na to, aby ste potom mohli určiť n-tý člen postupnosti, musíte v riešení matematicky dokázať, že postupnosť je s určitosťou taká, akú si ju predstavujete.

V prvom vzorovom riešení ukazujeme spôsob, ako túto úlohu riešiť bez nutnosti poznania vývoja celej postupnosti. V druhom riešení je už spomínaný dôkaz pre to, akú hodnotu bude nadobúdať n-tý člen postupnosti, avšak je zo zaujímavosti formulovaný v trojkovej sústave.

3. Opravovali: **Patrik Paľovčík a Benjamín Mravec**

Počet riešení: 27 Najkrajšie riešenia: **Lucia Chladná, Alena Bálintová a Richard Vodička**

Nech S je podmnožina množiny $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Dokážte, že v S existujú tri rôzne dvojice čísel s rovnakým rozdielom, ak S má

a. 21 prvkov,

b. 20 prvkov,

c. 19 prvkov.

Riešenie

a. V množine, ktorá má 21 prvkov sa nachádza $\binom{21}{2} = 210$ dvojíc čísel. Možných rozdielov medzi číslami od 1 do 100 je 99, pričom rozdiel 99 sa dá dosiahnuť len jedným spôsobom $(100 - 1)$, čiže keby sme chceli všetky ostatné rozdiely použiť dvakrát, mohlo by ich byť najviac $2 \cdot 98 + 1 = 197$. Máme viac dvojíc čísel ako maximálny počet rozdielov, teda nejaký rozdiel by tam musel byť použitý aspoň trikrát.

b. Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme čísla vo vybranej podmnožine zoradiť od najmenšieho po najväčšie. Následne sa môžeme pozrieť na rozdiely medzi za sebou idúcimi číslami. Takýchto rozdielov je medzi 20 prvkami 19, a teda keby sme chceli použiť každý rozdiel nanajvýš dvakrát, tak najmenší možný súčet rozdielov by mohol byť $2 \cdot (1+2+\ldots+9)+10 = 100$. Medzi číslami od 1 do 100 máme však len súčet takýchto neprekrývajúcich sa rozdielov 99. Je to tak preto, lebo pri pokrytí všetkých rozdielov medzi susednými číslami by sa ich súčet rovnal rozdielu krajných prvkov, a teda $100 - 1$. Takto by teda rozdiely byť rozdelené nemohli a musel by teda existovať nejaký, ktorý by bol použitý trikrát.

c. Opäť si zoradíme čísla od najmenšieho po najväčšie, tentokrát sa však nebudeme pozerať len na rozdiely medzi číslami, ktoré nasledujú za sebou, ale aj na tie, ktoré sú vzdialené o 2. Nazvime si pre zjednodušenie rozdiely medzi číslami vzdialenými o 1 a o 2 jednorozdiely a dvojrozdiely. Medzi 19 prvkami máme 18 jednorozdielov a 17 dvojrozdielov. Keby sme ich chceli zaplniť čo najmenšími rozdielmi tak, že by sme každý použili najviac dvakrát, ich súčet by bol $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 17) + 18 = 324$.

   Teraz sa pozrime na to, aký môže byť reálne súčet jednorozdielov a dvojrozdielov medzi 19 prvkami od 1 do 100. Ako sme už zistili v minulej podúlohe, súčet jednorozdielov je 99. Každá medzera medzi 2 číslami okrem 2 krajných je pokrytá taktiež aj 2 dvojrozdielmi. Napríklad medzera medzi 2. a 3. najmenším číslom je pokrytá dvojrozdielom medzi 1. a 3. a dvojrozdielom medzi 2. a 4. najmenším číslom. Keďže vieme že súčet veľkostí medzier (jednorozdielov) je 99, tak pre dvojrozdiely to bude $2 \cdot 99$ zmenšené o krajné medzery, ktoré sú pokryté len jedným dvojrozdielom (takže aspoň o 2). Z týchto informácií vieme, že najväčší možný súčet veľkostí jednorozdielov a dvojrozdielov je $3 \cdot 99 - 2 = 295$. To je menej ako 324, teda takéto rozdelenie rozdielov by nebolo možné, teda niektorý by musel byť použitý trikrát.

   Pre zaujímavosť, podobne ako pre 19 prvkov by sa táto úloha dala dokázať aj pre 18 prvkov, keby sme vzali do úlohy aj trojrozdiely. Vtedy by bol súčet 48 najmenších možných rozdielov, tak, že každý môžeme použiť maximálne dvakrát, 600, kým súčet veľkostí jednorozdielov, dvojrozdielov a trojrozdielov by nepresiahol $6 \cdot 99 = 594$.

Pre každú podúlohu sme si ukázali riešenie, ktoré je jednoduchšie ako tie pre ďalšie podúlohy. V skutočnosti by sa však riešenie časti c by sa dalo použiť aj na podúlohy a a b, taktiež aj riešenie časti b by sa dalo použiť aj na časť a.

Komentár

Podúlohu A vyriešil skoro každý. Niektorí riešitelia avšak pravdepodobe stratili body na tom, že sa snažili rovno dokazovať podúlohy B/C bez toho aby napísali riešenie prvej podúlohy. Možno vás to ľahšie riešenie pre áčko nenapadlo, ale chceme tým len povedať, že sa pre istotu oplatilo napísať aj tie osobitné riešenia pre A/B.

Podúloha C bola naozaj o dosť náročnejšia ako zvyšné, takže sme radi za každú vašu myšlienku, ktorú ste tejto podúlohe venovali. Viacerí z vás avšak napísali riešenie, kde len vyskúšali nejakú jednú možnosť, aj keď si možno mysleli, že to riešenie je takto všeobecne dokázané. Radu ktorú si z tohto môžete zobrať je, že pri takýchto úlohách je dobre sa zamyslieť aj nad tým, že či naozaj dokazujeme riešenie všeobecne alebo nie.

Sme ale veľmi nadšení za snahu, ktorú ste všetci vynaložili. <3

4.

Opravovali: **Ľubomír Vargovčík a Štefan Vašak**
Počet riešení: 12 Najkrajšie riešenie: **Oliver Seman**

Nech D, E sú body na strane AB trojuholníka ABC také, že

$$\frac{|AD| \cdot |AE|}{|BD| \cdot |BE|} = \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2.$$

Ukážte, že uhly ACD a BCE sú zhodné.

Riešenie

Predĺžme si stranu AC na polpriamku a doplňme si dve rovnobežky. Obe budú prechádzať bodom B, pričom prvá je rovnobežná s úsečkou CD a druhá s úsečkou CE. Priesečníky oboch rovnobežiek s polpriamkou AC si označme v poradí X a Y.

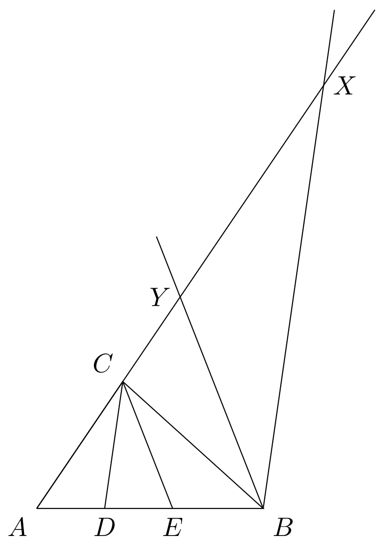
Všimnime si, že trojuholníky ADC a ABX sú podobné (podľa vety *uu*, jeden uhol majú spoločný a uhly ADC a ABX sú súhlasné). Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva pomer $|AD|/|DB| = |AC|/|CX|$. Analogicky si všimnime, že aj trojuholníky AEC a ABY sú podobné, a teda $|AE|/|EB| = |AC|/|CY|$.

Vynásobením získaných pomerov dostávame takúto rovnosť:

$$\frac{|AD| \cdot |AE|}{|BD| \cdot |BE|} = \frac{|AC|^2}{|CX| \cdot |CY|}$$

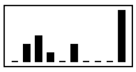
Všimnime si, že táto rovnosť sa nápadne podobá na tú zo zadania. Zistili sme teda, že $|CX| \cdot |CY| = |BC|^2$, z čoho po úprave dostávame rovnosť $|BC|/|CX| = |CY|/|BC|$. Všimnime si teraz, že trojuholníky BCY a XCB sú podobné (podľa vety *sus* z predošlej rovnosti a jedného spoločného uhla).

Teraz už iba uhlíme. Uhly CXB a CBY majú podľa poslednej podobnosti rovnakú veľkosť. Uhly CXB a ACD sú súhlasné a uhly CBY a BCE sú striedavé. Z toho vyplýva, že uhly ACD a BCE sú rovnako veľké.



5.

Opravoval: **Erik Novák**
Počet riešení: 14 Najkrajšie riešenia: **Lucia Chladná a Michal Ferdinandy**



Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje kladné celé číslo a také, že platí

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{pa}{p} \right\rfloor = 2024.$$

Pozn.: Hodnota $\lfloor x \rfloor$ sa rovná najväčšiemu celému číslu, ktoré nie je väčšie ako x.

Riešenie

Rozdeľme si riešenie na dva prípady. Buď $p \mid a$ alebo $p \nmid a$.

- $p \mid a$

Nech $a = kp; k \in \mathbb{Z}^+$.
Potom vnútri každej dolnej celej časti máme celé číslo, teda môžeme dolné celé časti odstrániť a získať tvar:

$$k + 2k + 3k + \cdots + pk = 2024$$

Vyjmime k pred zátvorku a upravme zátvorku podľa vzorca pre súčet po sebe idúcich čísel.

$$\begin{aligned} k(1 + 2 + 3 + \cdots + p) &= 2024 \\ \frac{kp(p+1)}{2} &= 2024 \\ kp(p+1) &= 4048 \end{aligned}$$

Na ľavej strane rovnice je súčin čísel, z ktorých jedno je p. Číslo p teda delí obe strany rovnice, teda $p|4048$. Prvočíselné delitele čísla 4048 sú 2, 11 a 23. Prvočíslo p môže teda v tejto možnosti nadobúdať iba tieto tri hodnoty. Číslo 4048 je však zároveň deliteľné $p+1$. Číslo 4048 však nie je deliteľné žiadnym z čísel $2+1 = 3, 11+1 = 12, 23+1 = 24$. V tejto možnosti teda nenachádzame žiadne vhodné p.

- $p \nmid a$

Prv ukážme, že každé z čísel $a, 2a, \ldots, pa$ dáva iný zvyšok po delení p. Ukážeme to sporom.
Nech $x_1 a \equiv x_2 a \pmod p; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+; x_1 < x_2 < p$. Potom ale $x_2 - x_1 \equiv 0 \pmod p$, a teda člen $\left\lfloor \frac{(x_2 - x_1)a}{p} \right\rfloor$, ktorý v súčte určite je, keďže $x_2 - x_1 < p$, je celým číslom. To znamená buď $p|x_2 - x_1$, čo je v spore s $x_2 - x_1 < p$, alebo $p|a$, čo je v spore s predpokladom. Každý z čitateľov členov súčtu má teda iný zvyšok po delení p. Keďže členov súčtu je p, vystriedajú sa nám v ňom všetky zvyšky od 0 po $p-1$, každý práve raz. Môžeme sa vrhnúť do riešenia.
Nech z_i je zvyšok čitateľa i-teho člena po delení p. Pre zlomky, ktoré nie sú celými číslami si môžeme uvedomiť, že dolná celá časť je rovná rozdielu samotného zlomku a jeho desatinnej časti, pričom desatinná časť bude pre každý z nich $\frac{z_i}{p}$. Rovnosť zo zadania si teda môžeme prepísať:

$$\frac{a}{p} - \frac{z_1}{p} + \frac{2a}{p} - \frac{z_2}{p} + \cdots + \frac{pa}{p} - \frac{z_p}{p} = 2024$$

Túto rovnosť preusporiadajme a upravujme, využívajúc vzorec pre súčet po sebe idúcich čísel:

$$\begin{aligned} \frac{a}{p} + \frac{2a}{p} + \cdots + \frac{pa}{p} - \frac{z_1}{p} - \frac{z_2}{p} - \ldots - \frac{z_p}{p} &= 2024 \\ \frac{a(1 + 2 + \cdots + p)}{p} - \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_p}{p} &= 2024 \end{aligned}$$

Tu môžeme využiť, že vieme, že čísla $z_1, z_2 \dots, z_p$ obsahujú všetky čísla od 0 po $p-1$, každé práve raz.

$$\begin{aligned} \frac{ap(p+1)}{2p} - \frac{p(p-1)}{2p} &= 2024 \\ \frac{a(p+1)-(p-1)}{2} &= 2024 \\ a(p+1)-(p-1) &= 4048 \\ ap+a-p+1 &= 4048 \\ a(p+1)-p-1 &= 4046 \\ a(p+1)-(p+1) &= 4046 \\ (a-1)(p+1) &= 4046 \end{aligned}$$

Číslo $p+1$ je na ľavej strane rovnice v súčine, delí teda obe strany rovnice, teda $(p+1) \mid 4046$. Ak by $p = 2$, tak $p+1 = 3 \mid 4046$ čo nie je pravda. Číslo $p+1$ je teda párne číslo o jedna väčšie ako prvočíslo. Prejdime teda párne delitele 4046.

- $p+1 = 2 \implies p = 1$ Nevyhovuje
- $p+1 = 14 \implies p = 13$ Vyhovuje
- $p+1 = 34 \implies p = 33$ Nevyhovuje
- $p+1 = 238 \implies p = 237$ Nevyhovuje
- $p+1 = 578 \implies p = 577$ Vyhovuje
- $p+1 = 4046 \implies p = 4045$ Nevyhovuje

Našli sme dve možnosti pre p. Ešte overme, či obe spĺňajú podmienku $p \nmid a$.

- $p = 13 \implies a = 290$ Vyhovuje, keďže $13 \nmid 290$
- $p = 577 \implies a = 8$ Vyhovuje, keďže $577 \nmid 8$

Ekvivalentnými úpravami sme našli jediné riešenia a overili ich správnosť. $p \in \{13, 577\}$

Komentár

Mnoho z riešení obsahovalo odkaz na literatúru, avšak nie s riešením celej úlohy, iba s vetou alebo faktom, ktorý bol nápomocný k riešeniu. Veľmi ma teší, že vás úloha neodradila, ale naopak motivovala k nájdeniu pomoci v dostupných zdrojoch. A tí, ktorí ste sa úlohou odradiť nechali, môžete to brať ako ponaučenie, že matematika je aj o používaní už známych vecí a nemusíte vždy vynachádzať koleso. (Týmto vás samozrejme NEmotivujem sa snažiť googliť celé úlohy.)

6.

Opravoval: **Michal Masrna**
Počet riešení: 2 Najkrajšie riešenie: **Lucia Chladná**

Postupnosť reálnych čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2-a_k}$ pre všetky kladné celé čísla k. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)} - 1\right)^n \leq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

Riešenie

Na začiatok poznamenajme, že pre $n = 1$ nerovnosť triviálne platí, totiž $0 \leq \frac{1}{2}$. V zvyšku dôkazu predpokladajme $n > 1$ (aby všetky používané sumy boli aj formálne správne).

Ďalej indukciou dokážme, že $0 < a_k \leq \frac{1}{2}$ pre všetky prirodzené k. Zo zadania $a_1 = \frac{1}{2}$ spĺňa podmienku, teraz predpokladajme, že podmienka platí pre a_k. Označme $f(x) = -x + \frac{1}{2-x}$. Táto funkcia je na intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ klesajúca (ukážeme napr. pomocou derivácie $f' = -1 + \frac{1}{(2-x)^2}$, ktorá ktorá je na danom intervale záporná), takže najvyššiu hodnotu nadobúda v bode 0 a najnižšiu v bode $\frac{1}{2}$.

Teda

$$
\begin{aligned}
0 < & a_k \leq \frac{1}{2} \\
f(0) > f(a_k) & \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} > & a_{k+1} \geq \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} \geq & a_{k+1} > 0
\end{aligned}
$$

čím je dôkaz dokončený.

Teraz sa pozrime na funkciu $g = ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Z jej druhej derivácie $g''(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2x^2}$ vidíme, že funkcia je na intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ konvexná (hodnoty druhej derivácie sú nezáporné). A keďže hodnoty a_k sú z tohto intervalu, môžeme použiť Jensenovu nerovnosť a dostať

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) &\leq \frac{g(a_1) + \cdots + g(a_n)}{n} \\
ln\left(\frac{1}{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} - 1\right) &\leq \frac{ln\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) + \cdots + ln\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)}{n} \\
n \cdot ln\left(\frac{1}{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} - 1\right) &\leq ln\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) + \cdots + ln\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \\
ln\left[\left(\frac{1}{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} - 1\right)^n\right] &\leq ln\left[\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)\right] \\
\left(\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} - 1\right)^n &\leq \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \qquad (1) \\
\left(\frac{(1-a_1) + \cdots + (1-a_n)}{a_1 + \cdots + a_n}\right)^n &\leq \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti[1] pre $x_i = \sqrt{a_i + a_{i+1}}$ a $y_i = \frac{1}{x_i}$ dostávame

$$
\begin{aligned}
((a_1 + a_2) + \cdots + (a_{n-1} + a_n))\left(\frac{1}{(a_1 + a_2)} + \cdots + \frac{1}{(a_n + a_{n+1})}\right) &\geq \left(\frac{\sqrt{a_1 + a_2}}{\sqrt{a_1 + a_2}} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n + a_{n+1}}}{\sqrt{a_n + a_{n+1}}}\right)^2 \\
\frac{1}{(a_1 + a_2)} + \cdots + \frac{1}{(a_n + a_{n+1})} &\geq \frac{n^2}{(a_1 + a_2) + \cdots + (a_n + a_{n+1})} \\
\frac{1}{(a_1 + a_2)} + \cdots + \frac{1}{(a_n + a_{n+1})} - n &\geq \frac{n^2}{a_{n+1} - a_1 + 2(a_1 + \cdots + a_n)} - n \\
(1 - a_1) + \cdots + (1 - a_n) &\geq \frac{n^2}{2(a_1 + \cdots + a_n)} - n
\end{aligned}
$$

Na ľavej strane je posledná úprava ekvivalentná, pretože $\frac{1}{a_k + a_{k+1}} = \frac{1}{a_k - a_k + \frac{1}{2-a_k}} = (2 - a_k)$ a $(2 - a_1) + \cdots + (2 - a_n) - n = (1 - a_1) + \cdots + (1 - a_n)$. Na pravej strane sme úpravu mohli spraviť, pretože sme menšiu stranu nerovnice nezväčšili, keďže sme nezmenšili menovateľ kladného zlomku, pretože $\frac{1}{2} = a_1 \geq a_{n+1}$. Upravujme ďalej.

[1] Prípadne jeden krok sme mohli ušetriť priamo použitím tzv. Titu's resp. Sedrakyan's lemma.

$$\begin{aligned}\frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+\cdots+a_n} &\geq \frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)\\ \left(\frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+\cdots+a_n}\right)^n &\geq \left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)^n \qquad (3)\end{aligned}$$

Spojením (2) a (3) dostávame

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)^n &\leq \left(\frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+\cdots+a_n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)\\ \left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)^n &\leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

Iné riešenie

Inšpirované najkrajším riešením.

Po (1) postupujeme rovnako. Ďalej rovnako odvoďme, že $\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=(2-a_k)$, teda

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-n &= (1-a_1)+\cdots+(1-a_n)\\ \frac{\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}}{n}-1 &= \frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{n}\end{aligned}$$

Z AH nerovnosti pre kladné členy $\frac{1}{a_1+a_2}$ až $\frac{1}{a_n+a_{n+1}}$ dostávame

$$\frac{n}{(a_1+a_2)+\cdots+(a_n+a_{n+1})} \leq \frac{\frac{1}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}}{n}$$

a po dosadení do predošlej rovnice

$$\begin{aligned}\frac{n}{(a_1+a_2)+\cdots+(a_n+a_{n+1})}-1 &\leq \frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{n}\\ \frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)+a_{n+1}-a_1}-1 &\leq \frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{n}\\ \frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1 &\leq \frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{n}\end{aligned}$$

Kde rovnako ako v prvom riešení sme v poslednej úprave nezmenšením menovateľa kladného zlomku ľavú stranu nezväčšili. Upravujme ďalej.

$$\begin{aligned}\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1 &\leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{(1-a_1)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+\cdots+a_n}\\ \frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1 &\leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}-1\right)\\ \left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)^n &\leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}-1\right)^n\end{aligned}$$

Napokon po dosadení z (1) dostávame požadované.

$$\left(\frac{n}{2(a_1+\cdots+a_n)}-1\right)^n \leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

Konečné poradie zimného semestra 49. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S4	GAMČABA	54	9	9	7	9	9	9	0	106
2.	Michal Vodička	S2	GAlejKE	52	9	9	6	9	9	-	0	103
3.	Richard Vodička	S4	GAlejKE	51	9	9	6	9	9	-	0	93
4.	Eva Krajčiová	S3	GAlejKE	54	9	9	-	9	9	-	0	90
5.	Ján Meteňko	S1	GPoštKE	48	9	9	-	9	2	-	0	86
6.	Magdaléna Škriabová	S1	GPoštKE	42	9	7	4	9	5	-	0	85
7.	Alenka Bálintová	S2	BGMHSuč	52	9	9	6	-	3	-	0	82
8.	Oliver Seman	S3	GAlejKE	43	9	9	3	9	-	-	0	73
9. - 10.	Lívia Sušková	S1	GPoštKE	34	9	6	3	9	2	-	0	72
	Alena Chladná	Z9	GAMČABA	36	9	9	-	-	9	-	0	72
11.	Tomáš Sukeľ	S3	GAGLSHE	43	9	9	1	-	5	-	0	67
12.	Nina Hudáková	S1	GAlejKE	40	9	7	-	-	-	-	0	63
13.	Marie Kasalová	S1	GJGJPha	33	8	7	6	-	-	-	0	61
14.	Sarah Klopstock	S2	ŠpMNDaG	43	5	9	3	-	-	-	0	60
15.	Matúš Libák	S4	GAlejKE	43	9	4	3	-	-	-	0	59
16.	Veronika Vodičková	S4	GAlejKE	32	9	7	-	9	-	-	0	57
17. - 18.	Marek Horváth	S4	GKonšPO	37	9	9	-	-	-	-	0	55
	Lívia Lukáčová	S1	GŠrobKE	37	5	7	1	0	-	-	0	55
19.	Filip Findorák	S3	GŠrobKE	24	9	9	3	9	-	-	0	54
20. - 22.	Michal Ferdinandy	S2	GPoštKE	18	9	9	4	-	9	-	0	53
	Jakub Stramba	S1	GŠrobKE	39	3	7	1	-	-	-	0	53
	Ondrej Králik	S4	GAlejKE	35	7	7	4	-	-	-	0	53
23.	Natália Poliačiková	S4	GPoštKE	28	9	9	3	-	-	-	0	49
24.	Martina Osuská	S2	GJHN3BA	24	9	7	4	-	-	-	0	44
25.	Richard Prikler	S2	GJARMPO	27	9	2	4	-	-	-	0	42
26.	Janka Urbánová	S2	GAlejKE	21	9	7	4	-	-	-	0	41
27.	Martin Dudjak	S3	SMládPP	31	9	-	-	-	-	-	0	40
28. - 29.	Daniel Ryan Takáč	S1	GAlejKE	20	5	8	-	-	-	-	0	38
	Veronika Jakabová	S3	GAlejKE	24	8	3	3	-	-	-	0	38
30.	Ondrej Tóth	S2	SPITKM	15	9	7	6	-	-	-	0	37
31. - 32.	Kalista Semancová	S4	GAGLSHE	17	8	6	4	-	1	0	0	36
	Matúš Pokorný	S3	GAMČABA	36	-	-	-	-	-	-	0	36
33.	Sophia Sotáková	S1	GAGLSHE	7	7	7	4	-	2	-	0	34
34.	Tomáš Saksun	S1	GAlejKE	14	9	1	3	-	1	-	0	31
35.	Martin Vrba	S2	GPoštKE	18	6	-	6	-	-	-	0	30
36.	Michal Iľkovič	S4	GSMTŠPO	25	-	-	-	-	-	-	0	25
37.	Nina Anna Betáková	S3	GAGLSHE	17	6	-	-	-	-	-	0	23
38.	Eva Hricová	S1	GAlejKE	22	-	-	-	-	-	-	0	22
39. - 40.	Natália Tkáčová	S3	SMládPP	11	9	-	-	-	-	-	0	20
	Michal Revický	Z9	GJARMPO	20	-	-	-	-	-	-	0	20
41.	Alexander Košťál	S3	GJarBrno	12	-	-	-	-	-	-	0	12
42.	Juraj Kramár	S4	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
43. - 44.	Adam Bukovan	S1	SSRodBA	7	-	-	-	-	-	-	0	7
	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S4	GŠrobKE	7	-	-	-	-	-	-	0	7
45. - 46.	Richard Suďa	S2	GVaršZA	5	-	-	-	-	-	-	0	5
	Lukáš Kostík	S1	GAlejKE	5	-	-	-	-	-	-	0	5
47.	Šimon Klčo	S1	GJBMTT	1	2	-	0	0	-	-	0	3

Názov:	Strom – korešpondenčný matematický seminár Číslo 3 • December 2024 • Zimný semester 49. ročníka (2024/2025)
Web:	`seminar.strom.sk`
E-mail:	`seminar.strom@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.
Vydáva:	Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	`zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`
Autori vzorových riešení:	Martin Šmilňák, Bianka Gurská, Branislav Ječim, Gertrúda Hanusová, Patrik Paľovčík, Benjamín Mravec, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak, Erik Novák, Michal Masrna

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.