



Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústreďenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMáci

Tábor mladých matematikov

Drahý riešiteľ, ak si prvák (alebo mladší) a premýšľaš, čo s časom počas letných prázdnin, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 20. až 27. júla 2025, pretože práve vtedy sa ocitneme na Chate Hámor pri Kokave nad Rimavicou na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánku s odkazom na prihlasovanie nájdeš na stránke.

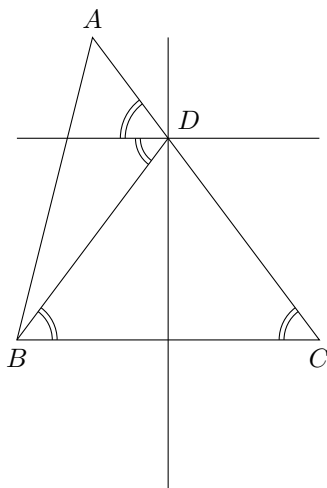
Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústreďenie, avšak je dlhšie, takže o toľko lepšie! Viac informácií a aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na <https://seminar.strom.sk/tmm/>.

1. Opravovali: **Kalista Semancová a Gertrúda „Mimi“ Hanusová**
 Počet riešení: 35 Najkrajšie riešenia: **Nina Hudáková, Alena Bálintová, Tomáš Sukeľ a Eva Krajčiová**



Majme ostrouhlý trojuholník ABC s najdlhšou stranou AC . Zostrojte na tejto strane bod D taký, že os uhla ADB bude rovnobežná so stranou BC . Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.

Riešenie



Rovnobežka s BC cez ľubovoľný bod D na strane AC delí uhol ADB na uhol súhlasný s uhlom BCD a uhol striedavý s uhlom CBD . Táto rovnobežka je osou uhla ADB práve vtedy, keď ho delí na zhodné uhly, čiže práve vtedy, keď $|\angle BCD| = |\angle CBD|$, to je keď trojuholník BCD je rovnoramenný so základňou BC . Hľadané body D sú teda práve tie body strany AC , pre ktoré $|BD| = |CD|$.

Zostrojíme ich ako priesečníky AC s osou úsečky BC . Strany a osi strán trojuholníka sú navzájom rôznobežné priamky, takže tento priesečník existuje najviac jeden. Keďže $|AC| \geq |AB|$ (podľa zadania AC je najdlhšia strana trojuholníka ABC), os strany BC vždy pretne úsečku AC . Môže ju však preťať v bode A : keď $|AB| = |AC|$, D splynie s A , čo zrejme nie je hľadaný bod D , pretože uhol ADB nie je dobre definovaný. Vždy okrem tohto prípadu jestvuje hľadaný bod práve jeden.

Komentár

Prvý odsek vzoráku je starostlivo formulovaný ako dôkaz ekvivalencie. Pri opravovaní sme napokon uznali za triviálne obrátiť dôkaz jednej implikácie na dôkaz druhej, čo tak pri zložitejších konštrukčných úlohách byť nemusí, a nestrhli body siedmim riešeniam, ktoré nedokázali, že sme našli všetky hľadané body, ani dvadsiatim riešeniam, ktoré nedokázali, že všetky nájdené body sme hľadali. a tu sa už pozorný čitateľ iste dovŕti, ktoré z tridsaťjeden deväťbodových riešení mali obe implikácie.

2. Opravovali: **Branislav Ječim a Patrik Paľovčík**
 Počet riešení: 29 Najkrajšie riešenie: **Ján Meteňko**



Martin a Robka hrajú hru v tabuľke 1×2025 . Martin si najprv na papier napíše niekoľko kladných celých čísel. Robka vloží mincu do jedného z políčok. V každom ťahu si Martin vyberie číslo, ktoré má napísané na papieri – o toľko políčok sa pokúsi Robka posunúť mincu buď doľava, alebo doprava (podľa svojho rozhodnutia, ale ak je možné mincu presunúť, presunie ju, inak ostáva na nezmenenej pozícii). Koľko najmenej čísel si Martin musí napísať na papier, aby vedel zaistiť, že minca navštívi všetky políčka bez ohľadu na to, akým spôsobom hrá Robka?

Riešenie

Jedno číslo Martinovi stačiť nebude, keďže Robke potom stačí hrať tak, že bude posúvať mincu na striedačku doľava a doprava, prípadne v opačnom poradí (ak Martinovo číslo vôbec nejaký pohyb umožní), a teda Martin nedonúti Robku navštíviť viac ako dve políčka v tabuľke.

Podme si ukázať, prečo dve čísla už Martinovi stačiť budú, a to vtedy, keď si napíše čísla 1012 a 1013. Pre obe tieto čísla platí, že ak nie je minca v strede (na 1013. políčku), tak má Robka len jeden možný smer pohybu mince, pretože jeden z krajov tabuľky bude určite vo vzdialenosti menšej ako 1012 od mince. Tiež si môžeme všimnúť, že ak minca nie je v strede a Martin zahrá 1013 a potom 1012, tak sa minca priblíži o 1 políčko bližšie k stredu (napr. $800 + 1013 - 1012 = 801$ alebo $1800 - 1013 + 1012 = 1799$). To zároveň platí aj opačne, ak minca nie je kraji tabuľky a Martin zahrá 1012 a následne 1013, tak sa minca vzdiali o 1 políčko ďalej od stredu (napr. $800 + 1012 - 1013 = 799$ alebo $1800 - 1012 + 1013 = 1801$).

Martinova stratégia môže byť takáto. Kým nie je minca v strede, bude striedavo vyberať jeho dve čísla s tým, že začne číslom 1013. To bude robiť až pokým sa minca dostane na stredné políčko tabuľky. Vtedy si vyberie číslo 1012 a Robka presunie mincu na začiatok alebo na koniec radu. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že ju posunie na začiatok radu, keďže tabuľka je v tomto momente symetrická. Ak bude následne Martin pokračovať striedavým vyberaním 1013 a 1012, a to konkrétne 1012-krát, tak minca určite navštívi všetky políčka po 1013. políčko. Ak si zároveň uvedomíme, že minca pri presunoch o 1013 políčk doprava navštevuje postupne aj zvyšných 1012 políčk napravo od stredu (postupnosť navštívených políčk bude: 1, 1014, 2, 1015, ..., 1011, 2024, 1012, 2025, 1013), tak môžeme vyhlásiť, že Martin týmto spôsobom vie zaistiť, aby minca navštívila všetky políčka.

Komentár

Niekoľkým z vás sa bohužiaľ podarilo nájsť riešenie len pre najmenej 11 čísel. Musíme však uznať, že malo veľmi peknú myšlienku spojenú so zápisom čísla v binárnej sústave, resp. ako súčet mocnín dvojky. Nebola to ale správna cesta pre riešenie tejto úlohy. Ostatná väčšina riešiteľov našla, aké dve čísla sú Martinovi dostačujúce. Aj tu sa však našlo pár nedostatkov, napr. ste neukázali, že jedno číslo by Martinovi naozaj nestačilo alebo ste nespomenuli, prečo čísla 1012 a 1013 nedovoľujú Robke vyberať si smer pohybu.

3. Opravoval: **Matúš Masrna**
Počet riešení: 21 Najkrajšie riešenia: **Ala Bálintová a Michal Vodička**



Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí, že počet deliteľov čísla n končiacich cifrou 1 alebo 9 je rovnaký alebo väčší ako počet deliteľov čísla n končiacich cifrou 3 alebo 7.

Riešenie

Najprv urobme niekoľko dôležitých pozorovaní.

Rozdeľme si cifry na tri skupiny. Do skupiny A budú patriť cifry 1 a 9, do skupiny B cifry 3 a 7 a do skupiny C cifry 0, 2, 4, 5, 6 a 8. Ďalej si uvedomme, že poslednú cifru súčinnu ovplyvňujú iba posledné cifry činiteľov a sledujme, čo sa stane, ak vynásobíme dve čísla, na základe skupín, do ktorých patria posledné cifry týchto dvoch čísel.

Pokiaľ aspoň jedno z čísel končí na cifru zo skupiny C, potom aj súčin bude zo skupiny C (pretože ak aspoň jedno z čísel je párne alebo deliteľné piatimi, bude to platiť aj o súčine).

Na sledovanie správania výsledku násobenia dvoch čísel, z ktorých ani jedno nekončí na cifru zo skupiny C, si pomôžeme tabuľkou. V každom políčku je posledná cifra súčinnu daných dvoch cifier a skupiny cifier sú farebne oddelené.

.	1	9	3	7
1	1	9	3	7
9	9	1	7	3
3	3	7	9	1
7	7	3	1	9

Pokiaľ jedno z čísel končí na cifru zo skupiny A, súčin bude končiť na cifru z tej skupiny, z ktorej je posledná cifra toho druhého čísla.

A pokiaľ jedno z čísel končí na cifru zo skupiny B, tak ak druhé číslo končí na cifru zo skupiny A, súčin bude končiť na cifru zo skupiny B, a naopak ak druhé číslo končí na cifru zo skupiny B, súčin bude končiť na cifru zo skupiny A.

Ďalej pozorujeme ako vznikajú delitele čísla. Máme číslo n a prvočíslo p , ktoré je s číslom n nesúdeliteľné, a teda sa nenachádza v jeho prvočíselnom rozklade. Potom číslo np^k budú deliť všetky delitele čísla n a k tomu ešte všetky delitele čísla n vynásobené p , všetky delitele čísla n vynásobené p^2 a tak ďalej až po všetky delitele čísla n vynásobené p^k .

Teraz už máme všetko na to, aby sme sa na úlohu pozreli pomocou matematickej indukcie, a to cez počet prvočíselných deliteľov čísla (počet rôznych prvočísel v jeho prvočíselnom rozklade). Predpokladajme, že pre číslo n platí, že počet jeho

deliteľov končiacich na cifru zo skupiny a je väčší alebo rovný počtu jeho deliteľov končiacich na cifru zo skupiny B a dokážme, že ak ho vynásobíme číslom p^k , kde p je prvočíslo nesúdeliteľné s n , takže vlastne ak pridávame nové prvočíslo k jeho prvočíselnému rozkladu, bude nerovnosť stále platiť.

Pokiaľ p končí na cifru zo skupiny C, vzniknú iba nové delitele končiace na cifry zo skupiny C, ktoré nič nezmenia na pravdivosti nerovnosti.

Pokiaľ p končí na cifru zo skupiny A, tak aj všetky jeho mocniny končia na cifru zo skupiny a a preto všetky novovzniknuté delitele budú súčinom deliteľa n a čísla končiaceho na cifru zo skupiny A. Teda budú mať poslednú cifru takej skupiny, ako mal pôvodný deliteľ n . Z toho vyplýva, že ak nerovnosť platila pre pôvodných deliteľov n , bude platiť aj pre všetkých nových deliteľov.

A pokiaľ p končí na cifru zo skupiny B, potom p^2 končí na cifru zo skupiny A, p^3 zase na cifru zo skupiny B atď. Novovzniknuté delitele budú v prípade nepárnych mocnín p súčinom deliteľa n a čísla končiaceho na cifru zo skupiny B a v prípade párnych mocnín p súčinom deliteľa n a čísla končiaceho na cifru zo skupiny A.

Preto v prípade nepárnych mocnín p ak pôvodný deliteľ končil na cifru zo skupiny A, novovzniknutý deliteľ bude končiť na cifru zo skupiny B a naopak ak pôvodný deliteľ končil na cifru zo skupiny B, novovzniknutý deliteľ bude končiť na cifru zo skupiny A. a v prípade párnych mocnín p bude posledná cifra novovzniknutého deliteľa rovnakej skupiny ako pôvodného deliteľa. Môžeme si teda všimnúť, že pre násobením všetkých pôvodných deliteľov dvoma za sebou idúcimi mocninami p (jednej párnej a jednej nepárnej) dostaneme presne rovnako veľa deliteľov končiacich na cifru zo skupiny a a končiacich na cifru zo skupiny B (tie, ktoré končia v jednej z tých mocnín na cifru zo skupiny A, budú v tej druhej končiť na cifru zo skupiny B a naopak).

Keď si uvedomíme, že pôvodné delitele sú vlastne delitele, ktoré vznikli pomocou p^0 , môžeme povedať, že všetkých deliteľov obsahujúcich nepárnu mocninu p je nanajvýš toľko isto, ako deliteľov obsahujúcich párnou mocninu p , lebo nepárnych mocnín čísla je nanajvýš toľko, ako párnych (vrátane 0). Predpokladali sme, že pre delitele n , teda pre delitele s p^0 , platí nerovnosť zo zadania. Takže platí aj pre delitele s akoukoľvek párnou mocninou p , a teda aj dokopy pre všetky delitele np^k .

Dokázali sme, že ak nerovnosť platí pre nejaké číslo, bude platiť aj po tom, čo číslo vynásobíme akoukoľvek mocninou akéhokoľvek prvočísla, ktorým ešte nie je deliteľné. Preto keďže pre číslo s 0 prvočíselnými deliteľmi (teda pre číslo 1) nerovnosť platí, bude platiť pre všetky kladné celé čísla.

4. Opravovali: **Martin Kopčány a Michal Il'kovič**
Počet riešení: 18 Najkrajšie riešenia: **Magdaléna Škriabová a Michal Vodička**



Pre každé kladné celé číslo k väčšie ako 1 nech $p(k)$ je najväčší prvočíselný deliteľ čísla k . Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel n väčších ako 2 takých, že

$$(p(n+1) - p(n))(p(n) - p(n-1)) > 0.$$

Riešenie

Dve po sebe idúce čísla sú nesúdeliteľné, takže platí $p(n) \neq p(n+1)$, teda rovnosť v podmienke nikdy nenastáva. Úlohu dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje len konečne veľa takých n , že $(p(k+1) - p(k))(p(k) - p(k-1)) > 0$. Všimnime si, že nejaké také číslo existuje. Je ním napríklad číslo 9. Bude teda existovať aj najväčšie číslo N , pre ktoré je podmienka splnená, a teda pre všetky kladné celé čísla $k > N$ už platí $(p(k+1) - p(k))(p(k) - p(k-1)) < 0$. Keďže súčin dvoch zátvoriek je záporný, tak nutne jedna musí byť kladná a druhá záporná. Takže buď $p(k-1) > p(k) < p(k+1)$, alebo $p(k-1) < p(k) > p(k+1)$.

Nech N' je najmenšie prirodzené číslo väčšie ako N také, že $p(N'-1) > p(N') < p(N'+1)$. Z predošlého odseku buď platí, že $p(N') > p(N'+1) < p(N'+2)$ alebo $p(N') < p(N'+1) > p(N'+2)$. Prvú z týchto možností vylučuje predpoklad $p(N') < p(N'+1)$. Takže musí platiť, že $p(N') < p(N'+1) > p(N'+2)$. Analogicky $p(N'+1) > p(N'+2) < p(N'+3)$. Indukciou vieme dokázať, že pre všetky kladné celé čísla l platí, že $p(N'+2l-1) > p(N'+2l) < p(N'+2l+1)$ a $p(N'+(2l+1)-1) < p(N'+(2l+1)) > p(N'+(2l+1)+1)$. Tým pádom p je funkcia ktorá od nejakého bodu striedavo stúpa a klesá a $N'+2l$ sú body, kde je „dole“ a $N'+2l+1$ sú body, kde je „hore“.

Vieme, že existuje nejaká mocnina dvojky väčšia ako N' . Tiež vieme, že pre všetky prirodzené čísla m platí $p(2^m) = 2$. Keďže 2 je najmenšie prvočíslo a $2^m-1, 2^m+1$ sú obe nepárne a väčšie ako 1, nutne musí platiť $p(2^m-1) > p(2^m) < p(2^m+1)$. Teda číslo 2^m sa musí rovnať číslu $N'+2l$ pre nejaké prirodzené číslo l .

Z toho vyplýva, že číslo N' je párne a že od bodu N' majú všetky párne čísla funkčnú hodnotu menšiu ako okolité čísla a všetky nepárne čísla funkčnú hodnotu väčšiu ako okolité čísla.

Pozrime sa na číslo 3^m . Keďže je to nepárne číslo, tak nutne $p(3^m - 1) < p(3^m) > p(3^m + 1)$. Ale keďže $p(3^m) = 3$, tak nutne $p(3^m + 1) = 2 = p(3^m - 1)$. To môže nastať iba pre $m = 1$, pretože mocniny dvojky väčšie ako 2 sú od seba vzdialené minimálne 4. Takže sme našli spor, čím sme dokázali, že existuje nekonečne veľa n spĺňajúcich podmienky zo zadania.

5. Opravovali: **Erik Novák a Ľubomír Vargovčík**
Počet riešení: 7 Najkrajšie riešenie: **Oliver Seman**



Nech k je pevná kružnica so stredom S a polomerom r . Nech B a C sú dva rôzne pevné body na k . Nech A je pohyblivý bod na k , odlišný od B a C . Nech P je bod taký, že stred úsečky SP je A . Priamka prechádzajúca bodom S a rovnobežná s priamkou AB pretína priamku prechádzajúcu bodom P a rovnobežnú s priamkou AC v bode D .

- Dokážte, že keď sa bod A pohybuje po kružnici k (okrem bodov B a C), bod D leží na pevnej kružnici, ktorej polomer je väčší alebo rovný r .
- Dokážte, že rovnosť v časti a. nastane práve vtedy, keď je úsečka BC priemerom kružnice k .

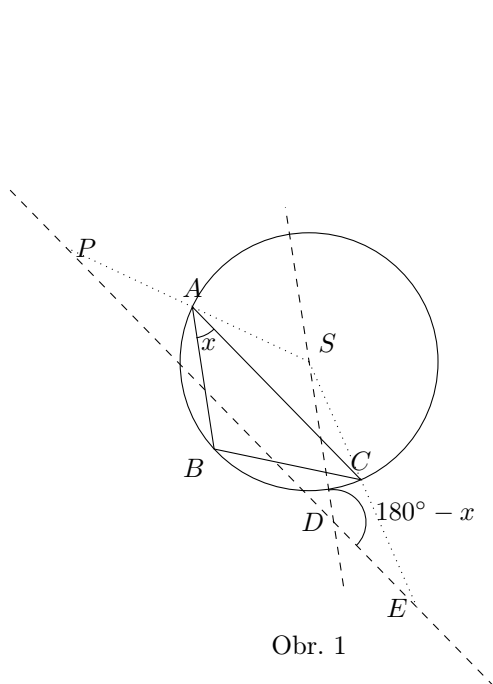
Riešenie

Zostrojme bod E , ktorý je stredovo súmerným priemetom bodu S cez bod C . Úsečka AC je strednou priečkou trojuholníka PES , pretože priamky AC a PD sú rovnobežné a platí $|SC| = |CE|$ a $|SA| = |AP|$. Z toho vyplýva, že priamka PD prechádza aj bodom E .

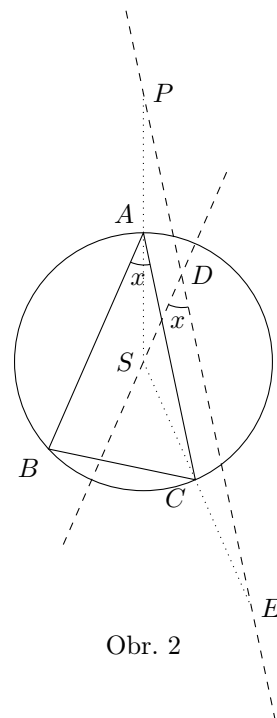
Povedzme, že uhol BAC má veľkosť x keď sa bod A nachádza na kratšom oblúku kružnice k rozdelenej bodmi B a C . Z vety o obvodovom uhle toto platí pre všetky výskyty bodu A na tomto kratšom oblúku. V prípade, že sa bod A bude nachádzať na dlhšom oblúku kružnice k , bude $|\angle BAC| = 180^\circ - x$.

V prípade, že sa bod A nachádza na dlhšom oblúku a bod D je v rovnakej polrovine tvorenej priamkou SE ako bod B (obr. 1), je uhol SDE doplnkovým k uhlu BAC (ktorý má teraz veľkosť $180^\circ - x$), teda $|\angle SDE| = x$. V druhom prípade, keď je A na dlhšom oblúku a D v opačnej polrovine ako B (obr. 2), sú uhly BAC a SDE súhlasné (a teda majú rovnakú veľkosť), pretože priamky AC a PE sú rovnobežné. Takže $|\angle BAC| = |\angle SDE| = 180^\circ - x$.

V opačnom prípade, keď sa bod A nachádza na kratšom oblúku a bod D je v rovnakej polrovine ako bod B platí, že uhly BAC a SDE sú súhlasné (analogické k obr. 2). $|\angle BAC| = |\angle SDE| = x$. V prípade, že A je stále na kratšom oblúku, ale bod D sa nachádza v opačnej polrovine, sa uhol SDE stane doplnkovým k uhlu BAC , teda má veľkosť $180^\circ - x$ (analogické k obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Všimnime si, že ak je bod D na jednej strane priamky SE , tak uhol SDE má veľkosť x a ak je na druhej strane, má veľkosť $180^\circ - x$. Z vety o obvodovom a stredovom uhle tým pádom vyplýva, že D musí ležať na kružnici, ktorej tetivou je úsečka

SE (nazvime ju k_D). Z prvého odseku vieme, že $|SC| = |SE|$ a zo zadania, že SC je polomerom k , takže $|SE| = 2r_k$. Keďže SE je tetivou k_D , tak polomer r_{k_D} musí byť väčší alebo rovný dĺžke tetivy, čo sme chceli dokázať.

Na to, aby nastala rovnosť medzi dĺžkami polomerov oboch kružníc, musí tetiva SE byť zároveň priemerom k_D . Z Tálesovej vety potom vyplýva, že uhol SDE je vždy pravý, čo ale znamená, že aj uhol BAC bude vždy pravý. Tým pádom (opäť z Tálesovej vety) musí byť úsečka BC tiež priemerom kružnice k .

6. Opravovali: **Lucia Chladná a Richard Vodička**
Počet riešení: 13 Najkrajšie riešenie: **Michal Ferdinandy**



Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla $x < y$ platí

$$\frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}} > \frac{y!}{x!(y-x)!} > \frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}(y+1)}.$$

Riešenie

Úlohu si rozdelíme na dve časti. Začnime nerovnosťou naľavo. Uvedomme si, že výraz v strede je rozpisané kombinačné číslo $\binom{y}{x}$. Po vynásobení menovateľom na ľavej strane teda dostávame:

$$y^y > \binom{y}{x} x^x (y-x)^{y-x}$$

Teraz si všimnime, že $y^y = (x + (y-x))^y$. Tento výraz vieme podľa binomickej vety rozpísať nasledovne (keďže $y \in \mathbb{Z}$):

$$(x + (y-x))^y = \binom{y}{0} x^0 (y-x)^y + \binom{y}{1} x^1 (y-x)^{y-1} + \dots + \binom{y}{y} x^y (y-x)^0 = \sum_{i=0}^y \binom{y}{i} x^i (y-x)^{y-i}$$

Podmienky $y > x$ a $y, x > 0$, nám zaručujú kladnosť každého z členov tejto sumy (kombinačné čísla sú totiž zrejme kladné). Vieme tak povedať, že hodnota tejto sumy bude ostro väčšia ako hodnota jedného z jej členov. Napríklad aj toho pre $i = x$ (ktorý naozaj máme, keďže prechádzame cez všetky i od 0 po y a $y > x > 0$). Z toho máme

$$y^y = (x + (y-x))^y = \sum_{i=0}^y \binom{y}{i} x^i (y-x)^{y-i} > \binom{y}{x} \cdot x^x (y-x)^{y-x}$$

čo bolo treba dokázať.

Pre dôkaz pravej nerovnosti opäť najprv upravme vynásobením $x^x(y-x)^{y-x}$ a rozpíšme y^y cez binomickú vetu:

$$\binom{y}{x} x^x (y-x)^{y-x} > \frac{y^y}{y+1} = \frac{\sum_{i=0}^y \binom{y}{i} x^i (y-x)^{y-i}}{y+1}$$

Pravú stranu si teraz vieme interpretovať ako aritmetický priemer $y+1$ kladných členov našej sumy. Ak všetky členy tejto sumy nemajú rovnakú hodnotu, tak jej najväčší člen bude väčší ako ich aritmetický priemer (ak by boli všetky rovnaké, bol by samozrejme iba väčší alebo rovný, čo nám nebude stačiť). Ľavú stranu vieme interpretovať ako jeden člen tejto sumy pre $i = x$. Stačí teda ukázať, že týmto najväčším členom je práve tento člen.

Ukázať, že všetky členy nie sú rovnaké, je jednoduché. Zoberme si napr. členy pre $i = 0$ a $i = 1$ (ktoré určite máme, lebo $y > 0 \Rightarrow y \geq 1$) a uvažme ich rovnosť:

$$\begin{aligned} \binom{y}{0} x^0 (y-x)^y &= \binom{y}{1} x^1 (y-x)^{y-1} \\ 1 \cdot 1 \cdot (y-x)^y &= yx(y-x)^{y-1} \\ y-x &= yx \\ \frac{y-x}{y} &= x \end{aligned}$$

Delili sme iba kladnými číslami. Avšak vďaka $x > 0$ platí $y - x < y$, teda

$$x = \frac{y - x}{y} < 1$$

čo je jasný spor. Všetky členy teda rovnaké byť nemôžu.

V druhom kroku ukážme, že náš vybraný člen je naozaj ten najväčší. Pozrime sa teda, kedy je ktorý z dvoch po sebe idúcich členov (pre $i = k$ a $i = k + 1$) väčší:

$$\begin{aligned} \binom{y}{k} x^k (y - x)^{y-k} &> \binom{y}{k+1} x^{k+1} (y - x)^{y-k-1} \\ \binom{y}{k} (y - x) &> \binom{y}{k+1} x \\ \frac{y!}{k! \cdot (y - k)!} (y - x) &> \frac{y!}{(k + 1)! \cdot (y - k - 1)!} x \\ \frac{y - x}{y - k} &> \frac{x}{k + 1} \\ yk + y - xk - x &> yx - xk \\ k &> \frac{yx + x - y}{y} \\ k &> x + \frac{x - y}{y} \end{aligned}$$

Všetky úpravy boli ekvivalentné, takže táto podmienka pre k je aj postačujúca. a keďže $0 < x < y$, tak $0 > \frac{x-y}{y} > -1$, čo kvôli $k \in \mathbb{Z}$ znamená, že nám stačí uvažovať $k > x$. Teda pre všetky $k > x$ je $(k + 1)$ -vý člen väčší ako k -ty, a naopak pre všetky $k \leq x$ je $(k + 1)$ -vý člen menší/rovný ako k -ty. Z toho vyplýva, že naše členy tvoria neklesajúcu postupnosť až po $k = x$, a odvtedy už klesajú. Takže x -tý člen je naozaj najväčší z nich, teda podľa úvah vyššie platí aj pravá nerovnosť, čo bolo treba dokázať.

Konečné poradie letného semestra 49. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Richard Semanišin	Z8	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	0	108
2. - 3.	Magdaléna Škriabová	S1	GPoštKE	54	9	7	9	9	-	7	0	104
	Gregor Černický	S1	GPoštKE	50	9	9	6	9	9	9	0	104
4. - 5.	Michal Ferdinandy	S2	GPoštKE	48	9	9	9	9	-	9	0	102
	Oliver Seman	S3	GAlejKE	53	9	9	9	9	9	4	0	102
6.	Ján Meteňko	S1	GPoštKE	54	9	9	-	9	-	9	0	99
7.	Richard Futáš	Z8	ZPAngKE	53	9	9	9	9	-	-	0	98
8.	Michal Vodička	S2	GAlejKE	51	9	9	9	9	-	-	0	96
9.	Eva Krajčiová	S3	GAlejKE	54	9	1	8	9	3	9	0	93
10.	Nina Hudáková	S1	GAlejKE	46	9	9	-	9	-	4	0	86
11.	Alena Chladná	Z9	GAMČABA	35	9	8	9	-	9	-	0	79
12.	Šimon Nalevanko	S1	GPoštKE	48	9	8	0	-	0	4	0	77
13.	Martin Vrba	S2	GPoštKE	25	9	9	9	9	-	-	0	70
14.	Tomáš Sukeľ	S3	GAGLSHE	47	9	6	6	-	-	-	0	68
15.	Alenka Bálintová	S2	BGMHSuč	43	9	-	9	-	6	-	0	67
16.	Martina Osuská	S2	GJHN3BA	41	9	1	9	-	-	-	0	60
17.	Lukáš Dankanin	S1	GPoštKE	36	9	7	-	-	-	-	0	59
18.	Richard Prikler	S2	GJARMPO	47	9	1	-	-	-	-	0	57
19. - 20.	Michal Revický	Z9	GJARMPO	28	9	-	8	2	-	0	0	55
	Jakub Katrák	Z9	ZPolIKE	20	9	8	-	9	-	-	0	55
21.	Lukáš Paška	S1	GPoštKE	18	9	9	1	6	-	0	0	52
22.	Filip Findorák	S3	GŠrobKE	42	9	-	-	-	-	-	0	51
23.	Sarah Klopstock	S2	ŠpMNDaG	32	9	-	9	-	-	-	0	50
24.	Lucia Šebová	S2	GPoštKE	17	9	6	-	9	-	3	0	47
25. - 26.	Lívia Lukáčová	S1	GŠrobKE	39	0	6	-	-	-	-	0	45
	Martin Dudjak	S3	SMLádPP	36	9	-	-	-	-	-	0	45
27. - 28.	Sophia Sotáková	S1	GAGLSHE	34	9	-	-	-	-	-	0	43
	Jakub Stramba	S1	GŠrobKE	35	0	8	-	-	-	-	0	43
29.	Lívia Sušková	S1	GPoštKE	35	-	7	-	-	-	-	0	42
30.	Marie Kasalová	S1	GJGJPha	31	9	-	-	-	-	-	0	40
31.	Janka Urbánová	S2	GAlejKE	22	9	1	3	3	-	-	0	39
32.	Jakub Tomasz	Z8	ZKro4KE	27	9	-	-	-	-	0	0	36
33. - 35.	Nina Anna Betáková	S3	GAGLSHE	19	9	6	1	-	-	-	0	35
	Samuel Šandor	S3	GPoštKE	35	-	-	-	-	-	-	0	35
	Veronika Jakabová	S3	GAlejKE	26	9	-	-	-	-	-	0	35
36.	Ondrej Tóth	S2	SPITKM	21	-	8	-	2	-	-	0	31
37.	Zoja Poliaková	S3	GJGTBB	19	0	1	2	7	-	-	0	29
38.	Adam Horváth	Z8	GAlejKE	25	-	-	-	-	-	-	0	25
39. - 40.	Tomáš Lang	S2	SPTechSN	16	3	1	-	-	-	-	0	20
	Matej Kurbel	S3	GAMerTT	20	-	-	-	-	-	-	0	20
41.	Daniel Ryan Takáč	S1	GAlejKE	8	-	5	3	-	-	-	0	19
42.	Filip Feher	Z8	ZPAngKE	8	-	-	-	-	-	-	0	8

Názov:	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 6 • Máj 2025 • Letný semester 49. ročníka (2024/2025)
Web:	seminar.strom.sk
E-mail:	seminar.strom@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk .
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk

*Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na
Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.*